M a t e m á t i c a s

d e

2º d e B a c h i l l e r a t o

Gráficas de Funciones Reales de Variable Real

Por Javier Carroquino CaZas

Catedrático de matemáticas

del

I.E.S. Siete Colinas

Ceuta 2004

Gráficas
de
Funciones Reales
de
Variable Real

Javier Carroquino Cañas

Matemáticas de 2º de bachillerato

– • –

Ciencias de la Naturaleza y la Salud

Tecnología

GRÁFICAS DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Por

Javier Carroquino Cañas

Catedrático de matemáticas

I.E.S. Siete Colinas (Ceuta)

Departamento de Matemáticas

Ceuta 2004

I.E.S. Siete Colinas (Departamento de Matemáticas)
Gráficas de Funciones Reales de Variable Real

Depósito Legal : CE&102&2004

ISBN : 84&688&8498&7

Número de Registro : 6869804

Ceuta 2004

Prólogo

La representación gráfica de una función es una forma de agrupar las distintas propiedades que la relación entre las variables independiente y dependiente tienen entre sí y tener al alcance de un simple "*golpe de vista*" dichas propiedades.

Una simple observación de la gráfica de una función nos puede dar una completa información de la forma en que se relacionan las variables x (independiente) e y (dependiente), sin necesidad de profundizar en estudios numéricos exhaustivos, aunque quede claro que para obtener esa representación gráfica puede ser necesario la elaboración de dicho estudio.

En este tema trataremos distintas propiedades elementales de las funciones que nos permitirán obtener una gráfica más o menos aproximada de algunas de ellas, dejando para temas sucesivos un estudio más profundo que requieren la utilización de unos conocimientos sobre los *límites de funciones* y las *derivadas*.

Índice

Página

Gráficas de funciones reales de variable real

Este tema, dedicado al estudio sobre las **"Representaciones Gráficas de las Funciones"**, conviene que sea afrontado por el alumno posteriormente al estudio del tema "**Funciones Reales de Variable Real**" (dentro de la colección del mismo autor) que inicia al estudio de las funciones a nivel de bachillerato.

Se pretende ahora enfocar de una forma sencilla e intuitiva, dejando para temas posteriores un enfoque más riguroso, la construcción de la gráfica de una función según el aspecto de esta y dentro de las limitaciones que puede dar ese enfoque intuitivo y superficial que mencionamos, siendo conscientes de que más adelante, una vez concluido el estudio de **límites** y **derivadas** de funciones, dicha pretensión será mas completa.

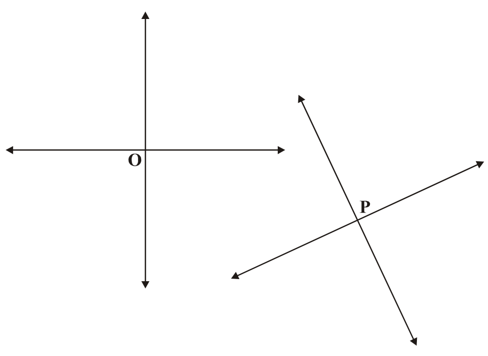
1.Sistema de ejes cartesiano rectangular en el plano.-

L Consideremos un plano.
L Al conjunto formado por todos los puntos de ese plano (infinitos) le llamamos ℘.
L Consideremos un punto O de ese plano, es decir, O 0 ℘.
L Imaginemos dos rectas contenidas en ese plano, que sean perpendiculares y que se corten en el punto O.

¡Pues bien! Se dice que las dos rectas perpendiculares y el punto O, constituyen un **sistema de ejes cartesiano rectangular en ese plano.**
En un plano podemos construir infinitos sistemas cartesianos rectangulares.
Al punto O (punto de corte de las rectas) se le denomina **Origen** del sistema y a las rectas perpendiculares, **Ejes Cartesianos**.

Ejemplo 1.-

Imaginemos que este papel es un plano (en realidad, una porción de un plano). Construyamos dos sistemas de ejes cartesianos rectangulares:



En la figura de la izquierda tenemos dos sistemas de ejes cartesianos rectangulares (nótese que en ambos casos las rectas son perpendiculares).
En uno de ellos el origen es el punto O, mientras que en el otro el origen es otro punto P.
Las flechas en los "terminales" de las rectas (en realidad segmentos) nos indican que se prolongan hacia el infinito (en muchos casos se omiten).

2.Relación entre los puntos de un plano y el conjunto ú×ú.-

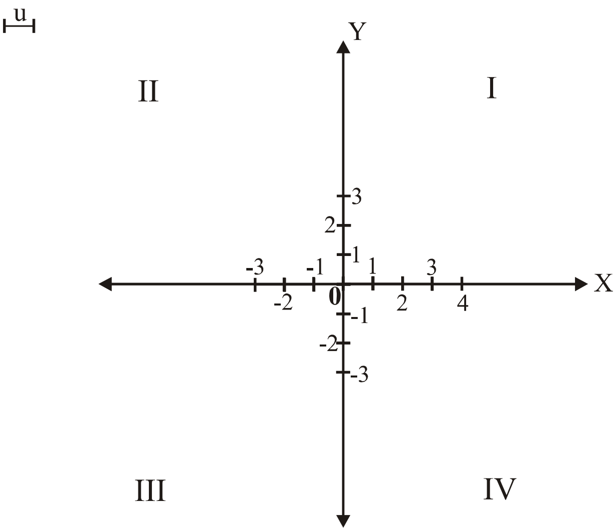
P Imaginemos un plano 𝝋 (podemos imaginar el papel como una porción de un plano).

P Consideremos un sistema cartesiano rectangular de origen O 0 𝝋.

P Las dos rectas perpendiculares que se cortan en O las consideramos como **rectas reales**, es decir, que en ellas podemos representar los números reales. Para ello consideraremos en ambas que el punto O actúa como el punto donde se representa el número 00ú.

P Consideremos una medida de longitud como unidad. Por ejemplo, un centímetro o simplemente un segmento de cualquier longitud. La longitud de ese segmento consideramos que es igual a 1.

P Considerando la unidad del apartado anterior, graduamos las dos rectas reales (ejes perpendiculares). Es decir:



En la figura de la izquierda tenemos un sistema cartesiano rectangular en el que los ejes cartesianos han sido graduados como una recta real.

A uno de los ejes lo nombramos con la letra **X** y se denomina **eje de abcisas**. El otro eje se denomina **eje de ordenadas** y lo expresamos con la letra **Y**.

El la parte superior izquierda tenemos un segmento que representa la unidad y nos permite graduar ambas rectas.

Nótese que un sistema cartesiano rectangular divide el plano en cuatro regiones que ordenamos llamando I, II, III y IV, denominandose **cuadrantes**.

P Consideremos ahora el conjunto "*producto cartesiano de* ú×ú", es decir:

ú×ú = { (x , y) * x , y 0ú }

Recuerda que al elemento (x , y) se le denomina "*par ordenado*"

P Vamos a establecer una correspondencia entre los puntos de 𝝋 (puntos del plano) y los pares ordenados (x , y) del conjunto ú×ú.

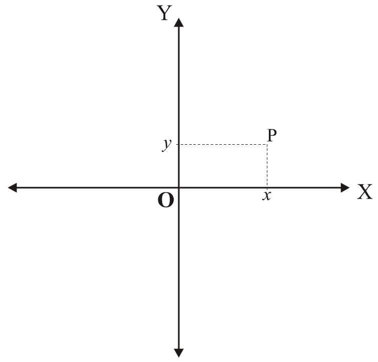
Veamos como se establece esa correspondencia:

N Sea P un punto cualquiera del pano, es decir, P 0 𝝋.

N Tracemos desde el punto P un segmento paralelo al eje de ordenadas (en la figura anterior, eje vertical) hasta que corte al eje de abcisas (eje X) en un punto. Ese punto se corresponde con un número real al que denominamos x. Igualmente trazamos desde P otro segmento paralelo al eje de abcisas hasta que corte al eje de ordenadas (Y) en un punto que se corresponde con un número real y.

N En el apartado anterior hemos obtenido dos número reales, x e y, por lo que (x , y)0ú×ú.
¡Pues bien! Decimos que el punto P 0 𝝋 se corresponde con el par (x , y)0ú×ú y viceversa, esto es, el par (x , y)0ú×ú se corresponde con el punto P 0 𝝋.

Gráficamente quedaría:



Al punto P le corresponde un único par ordenado (*x*,*y*) y al par ordenado (*x*,*y*) le corresponde un único punto P del plano.
Esta correspondencia se dice que es biunívoca y se expresa del siguiente modo:

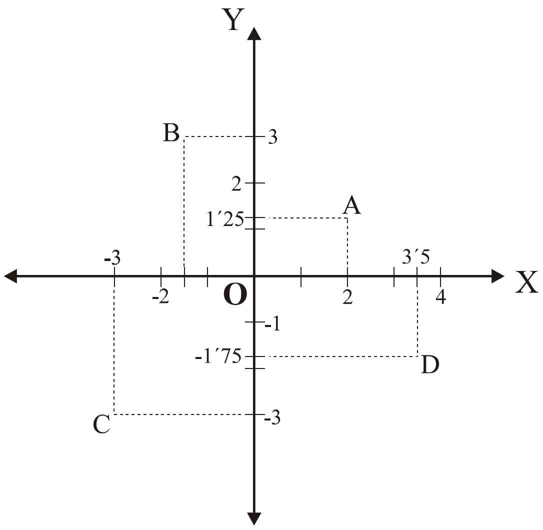
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P} \longleftrightarrow R \times R \\ P \longleftrightarrow (x, y) \end{array}\right\} \textit{Aplicacion biyectiva}$$

Debe tenerse en cuenta que para cada sistema cartesiano tenemos una correspondencia distinta.

En general, si un punto P se corresponde con un par (*x*,*y*), se expresa **P : (*x*, *y*)**, aunque es más habitual expresarlo de la forma **P(*x*, *y*)** e incluso **P** = **(*x*, *y*)**.

Ejemplo 2.-

Vamos a representar algunos puntos en un sistema de ejes:

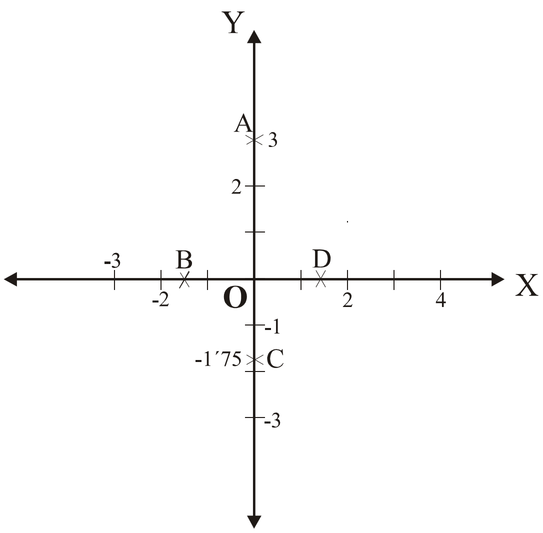


A(2 , 1´25) es un punto del cuadrante I
B(-1´5 , 3) es un punto del cuadrante II
C(&3 , &3) es un punto del cuadrante III
D(3´5 , &1´75) es un punto del cuadrante IV

O (0 , 0) es el origen de coordenadas. Consideramos que no está en ningún cuadrante o está en todos.

Ejemplo 3.-

Vamos a representar algunos puntos que estén exactamente en los ejes:



A(0 , 3) está entre los cuadrantes I y II (semieje positivo de ordenadas)

B(-1´5 , 0) está entre los cuadrantes II y III (semieje negativo de abcisas)

C(0 , -1´75) está entre los cuadrantes III y IV (semieje negativo de abcisas)

D($\sqrt{2}$, 0) está entre los cuadrantes I y IV (semieje de absisas positivo).

3.Coordenadas de un punto del plano.-

Consideremos un sistema de ejes cartesianos rectangular de origen O y ejes X e Y. Para abreviar lo expresaremos del modo siguiente: **XOY**.

Sea P un punto del plano, es decir, P0ϕ.

Supongamos que al punto P le corresponde el par ordenado (*x*,*y*)0ú×ú, es decir, P (*x*,*y*). ¡Pues bien! A los números ***x*** e ***y*** se les denomina "**coordenadas del punto P respecto de ese sistema de ejes cartesiano**".

Por tanto, un punto cualquiera P del plano, viene dado o determinado por sus dos coordenadas (dos números reales).

A la primera coordenada "*x*" se le denomina "**abcisa**" del punto P.

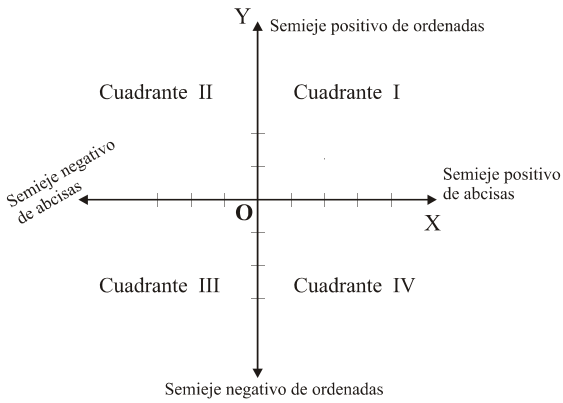
A la segunda coordenada "*y*" se le denomina "**ordenada**" del punto P.

Ejemplo 4.-

Si un punto P del plano viene determinado de la forma $P\left(-\sqrt{5},e^{3}\right)$, respecto de cierto sistema de ejes cartesianos, sabemos que $x=-\sqrt{5}$ es la abcisa e $y=e^{3}$ es la ordenada de P.

4.Ejes y cuadrantes.-

Un sistema de ejes cartesiano rectangular, divide al plano en cuatro regiones, además de los puntos de los propios ejes y el origen O. En este apartado vamos a ver como queda organizado el plano mediante cierto sistema de ejes cartesiano rectangular:



Supongamos un punto P(*x*,*y*) del plano.
Según los valores de las coordenadas *x* e *y*, el punto P estará situado en uno de los cuadrantes o de los semiejes. Veamos:

$$\left.\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \ \textit{està en}\ \mathrm{I} \qquad \left.\begin{matrix} x<0 \\ y>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \ \textit{està en}\ \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{matrix} x<0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \ \textit{està en}\ \mathrm{III} \qquad \left.\begin{matrix} x>0 \\ y<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \ \textit{està en}\ \mathrm{IV}$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \ \textit{està en el eje de ordenadas.}$$

$$\left.\begin{matrix} x\neq 0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \ \textit{està en el eje deabcisas.}$$

Ejemplo 5.-

El punto A(-3´22 , π) está en el cuadrante II

El punto $B\left(0,\sqrt[3]{-11}\right)$ está en el semieje negativo de ordenadas.

5.Representación gráfica de una función.-

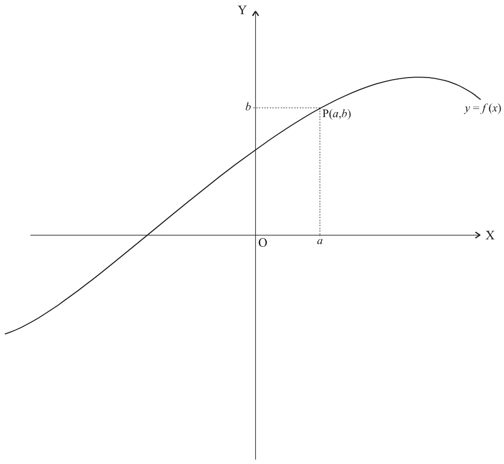
S Sea $y = f(x)$ una función real de variable real.

S Sea G_f el grafo de esa función. Recuerda (ver tema "*Funciones reales de variable real*") que el grafo de una función lo forman todos los pares ordenados de ú×ú tales que la segunda componente (ordenada) es la imagen de la primera (abcisa), es decir:

$$G_f = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \;\middle|\; y = f(x) \right\} \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}$$

S Supongamos que tenemos un plano y en él un sistema de ejes cartesiano rectangular XOY
Pues bien, representar gráficamente la función $y = f(x)$ respecto de ese sistema es el equivalente a representar todos los puntos del plano que se corresponden con los pares ordenados del grafo de esa función, es decir, todos los pares (x,y) de G_f.

S En general, el resultado que se obtiene es una línea recta o curva que aparecería dibujada en el plano. Gráficamente sería algo así:



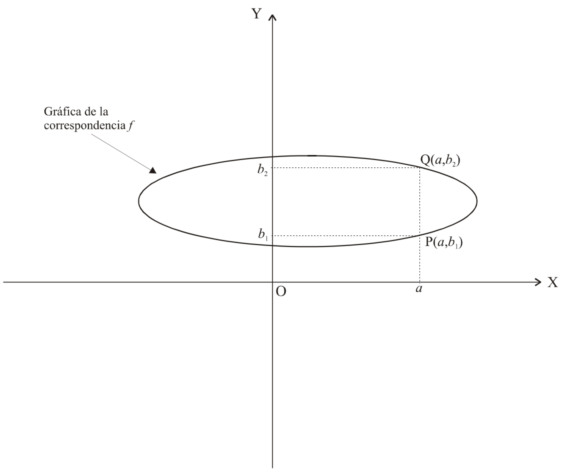
La curva representada podría ser un trozo o la gráfica completa de una función $y = f(x)$

Hemos marcado un punto P de la gráfica de la función que se corresponde con un par del grafo de esa función. Esto significa que la imagen de a 0ú es $f(a) = b$ 0ú.

Podemos expresar entonces que:

P esta en la gràfica de f $\Leftrightarrow$ $(a,b) \in G_f$

Observación: La gráfica de una función $y = f(x)$ debe ser tal que para un valor de x haya a lo sumo una imagen y. Si para algún valor de x hubiese dos o más imágenes, estaríamos en el caso de que $y = f(x)$ es una "*correspondencia no aplicación"* (ver tema "*funciones reales de variable real*"). Por ejemplo:



En la figura puede apreciarse que la gráfica es una elipse, pero notamos que a 0ú se corresponde con dos número reales, b_1 y b_2, por lo que tenemos que f no es una aplicación.

Aunque no es motivo de este tema, digamos que, en este caso, sería posible encontrar una fórmula o expresión implícita que relacione los valores (x,y) de los puntos de esa gráfica, esto es, una fórmula del tipo $f(x,y) = 0$

Veremos ahora la forma que tienen las gráficas de algunos de los tipos de funciones más elementales. Dibujar la gráfica de una función puede tener diversos grados de complejidad. En este tema veremos casos mas sencillos, dejando para temas posteriores otras funciones más complejas o bien una representación mas completa de la que ahora veremos.

6.Representación gráfica de las funciones polinómicas.-

Recordemos que una función polinómica es aquella cuya expresión explícita tiene forma de polinomio, es decir:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$o\ también,\ llamando\ \ f(x) = y:$$
$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

La gráfica de una función polinómica es una línea recta o curva, depende del grado del polinomio que representa a la función. Veamos cada caso:

6.1.Representación gráfica de la función cero.-

Recordemos que la función cero es aquella que transforma todo número real en el cero. Matemáticamente:

$$\left.\begin{array}{l} O: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow O(x) = 0 \end{array}\right\} \textit{Es decir}:\ \forall x \in \mathbb{R}\ \text{ es }\ O(x)=0$$

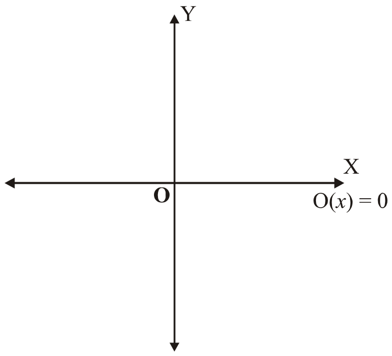
El grafo de esta función será: $G_O = \left\{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Por tanto, la gráfica de esta función estará formada por todos los punto del plano que se corresponden con los pares (x,0), es decir, la primera coordenada es un número cualquiera $\boldsymbol{x}$ y la segunda es 0.

Serán puntos de la gráfica, por ejemplo: O(0,0) ; A(1,0) ; B($\sqrt{5}$,0) ; C(-12´372 , 0)

Esto significa que todos los puntos del eje de abcisas pertenecen a la gráfica y todos los puntos de la gráfica pertenecen al eje de abcisas. Por tanto, la gráfica de la función cero coincide con el eje de abcisas.

Gráficamente:



Nótese como hemos hecho coincidir la gráfica de la función cero con el eje de abcisas.

En realidad, la función cero puede considerarse como una función polinómica sin grado (no de grado cero).

Nótese que la gráfica de la función cero es una recta.

6.2.Representación gráfica de una función constante.-

Una función constante es aquella que transforma todo número real $\boldsymbol{x}$ en el mismo número $\boldsymbol{k}$.

Matemáticamente: $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow f(x) = k \end{array}\right\}$ *siendo k un número real* constante.

Los pares del grafo de esta función serán de la forma (x , k), siendo x cualquier número.

$$G_f = \{ (x,k) \mid x \in \mathrm{R} \} \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R} \quad \textit{es el grafo de } f(x)=k$$

Nótese que en los pares ordenados del grafo, la segunda componente (k) es constante, mientra que la primera (x) puede tomar cualquier valor. Esto hace que la gráfica de la función constante $f(x) = k$ es una recta paralela al eje de abcisas y que pasa por el punto $(0 , k)$, es decir, una recta "horizontal".

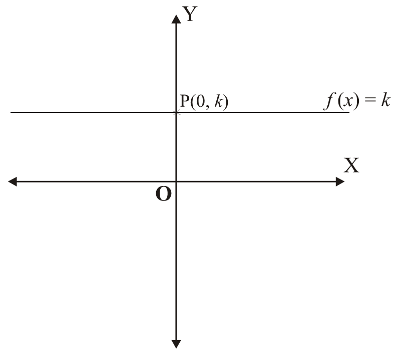
Gráficamente:

En el caso que hemos representado se observa que el número k es positivo (por eso la gráfica está "*por encima*" del eje de abcisas.

Si $k<0$, la recta que representa a $f(x) = k$ estará "por debajo" del eje de abcisas.

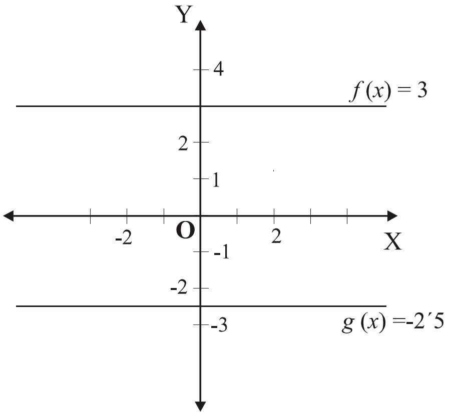
Recuérdese que:

$$(x,k) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = k$$



Ejemplo 6.-

En este ejemplo dibujamos en el mismo sistema de ejes las siguiente funciones constantes: $f(x) = 3$ y $g(x)$ =&2´5. Nótese que, al ser las gráficas rectas, pueden dibujarse después de marcar dos puntos del plano:



Para la función $f(x) = 3$ tenemos:

$$G_f = \{ (x,3) \mid x \in \mathrm{R} \} \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}$$

Para la función $g(x)$ = &2´5 tenemos:

$$G_g = \{ (x,-2'5 \mid x \in \mathrm{R} \} \subset \mathrm{R} \times \mathrm{R}$$

6.3.Representación gráfica de una función polinómica de grado uno.-

Una función polinómica de grado uno tiene la forma:

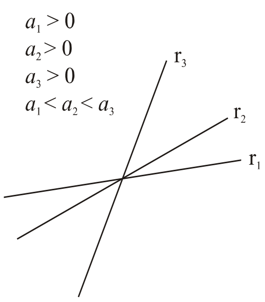
$$\left. \begin{array}{l} f: \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \\ \quad x \longrightarrow f(x) = a\,x + b \end{array} \right\} \textit{siendo } a \textit{ y } b \textit{ números reales} \text{ constantes.}$$

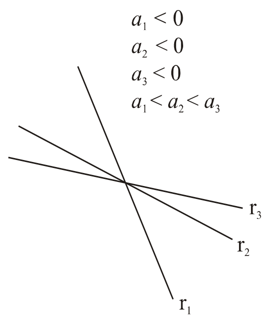
La gráfica de una función polinómica de grado uno es una recta "*inclinada*", esto es, no paralela al eje de abcisas. La inclinación viene dada por el valor del número ***a***, del modo siguiente:

En la figura anterior, la recta de la izquierda se dice que es creciente (si la seguimos con la vista de izquierda a derecha, debemos "subirla"). La recta de la derecha se dice que es decreciente (de izquierda a derecha vamos "bajando").

La mayor o menor inclinación de la recta que representa a una función polinómica de grado uno, también se debe al valor de ***a***. Este número se llama **pendiente de la recta** (o pendiente de la función $f(x) = ax + \mathrm{b}$).

Cuanto mayor sea el valor absoluto de ***a***, mayor será la inclinación (creciente o decreciente) de la recta. Es decir:





En la figura de la izquierda sería:

$$\left.\begin{array}{l} r_1:\ \textit{recta correspondiente a}\ \ y = a_1\,x + b_1 \\ r_2:\ \textit{recta correspondiente a}\ \ y = a_2\,x + b_2 \\ r_3:\ \textit{recta correspondiente a}\ \ y = a_3\,x + b_3 \end{array}\right\}$$

En la figura de la derecha sería:

$$\left.\begin{array}{l} r_1:\ \textit{recta correspondiente a}\ \ y = a_1\,x + b_1 \\ r_2:\ \textit{recta correspondiente a}\ \ y = a_2\,x + b_2 \\ r_3:\ \textit{recta correspondiente a}\ \ y = a_3\,x + b_3 \end{array}\right\}$$

En el caso en que b = 0, entonces la recta pasa por el origen de coordenadas.

En efecto:

$$f(x) = a\,x + 0\ ,\ \textit{es decir},\ f(x) = a\,x$$
$$x = 0 \rightarrow f(0) = a \cdot 0 = 0$$
$$\text{Por tanto}\ \ (0,0) \in G_f$$

Ejemplo 7.-

Vamos a representar en el mismo sistema de ejes las rectas que representan gráficamente a las funciones $f(x) = 2x - 1\ \ y\ \ \ g(x) = \frac{1}{2}x - 1$

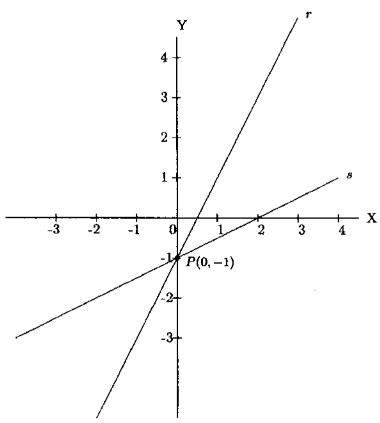
Como se trata de rectas, con obtener dos puntos de cada una de ellas es suficiente para dibujarlas. Para obtener los puntos construimos una tabla de valores para cada una de ellas.

Veamos:

$$\text{Llamamos:} \begin{cases} \textit{recta } r\text{:}\ \ y = 2x - 1 & \textit{En este caso es } a = 2 > 0 \\ \textit{recta } s\text{:}\ \ y = 0'5x - 1 & \textit{En este caso es } a = 0'5 > 0 \end{cases}$$

x	*y* = 2*x*-1	Puntos
0	&1	P(0,&1)
2	3	B(2,3)

x	*y* = 0´5*x*-1	Puntos
0	&1	P(0,&1)
2	0	D(2,0)



Nótese en la gráfica anterior que ambas rectas se cortan en un punto y que la recta r ($a = 2$) es más inclinada que la recta s ($a = 0$`5).

En este caso:

Pendiente de r (pendiente de la función $f(x)$) = 2

Pendiente de s (pendiente de la función $g(x)$) = 0´5

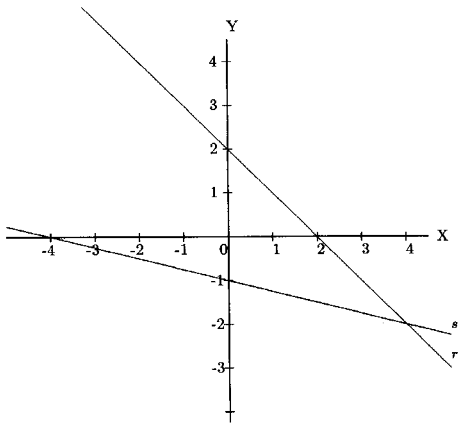
Ejemplo 8.-

Ahora vamos a representar las funciones $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = -0'25x - 1$

En este caso ambas pendientes son negativas, es decir, las rectas son decrecientes.

x	*y* = &*x* + 2	Puntos
0	2	A(0,2)
2	0	B(2,0)

x	*y* =- 0´25*x*-1	Puntos
0	&1	P(0,&1)
4	-2	B(4,-2)



En este caso **r** representa a la función *f* (*x*) y **s** a la función *g*(*x*).

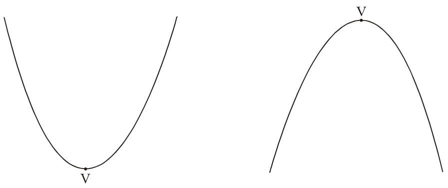
Nótese que la recta **r** es más inclinada que la recta **s**.

En una función polinómica de grado uno, $y = a\,x + b$, cuanto más próximo esté el valor de la pendiente ***a*** de cero, "*más horizontal*" es la recta que la representa.

6.4.Representación gráfica de una función polinómica de grado dos.-

La forma explícita de una función polinómica de grado 2 es $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo ***a***, ***b*** y ***c*** números reales tales que ***a*** ... 0 ya que si fuese ***a*** = 0, tendríamos una función polinómica de grado uno.

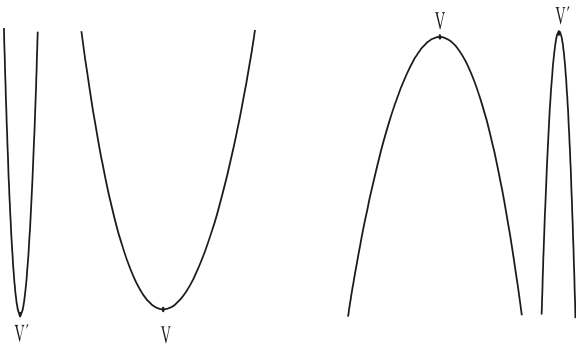
Pues bien, la gráfica de una función polinómica de grado 2 es una línea curva que se llama **parábola** y tiene alguna de estas dos formas:



Hagamos las siguientes observaciones:

La curva de la izquierda se obtiene cuando el coeficiente ***a*** es positivo, es decir: ***a*** > 0. Cuanto mayor sea el valor de ***a***, más cerrada será la curva.

La curva de la derecha se obtiene cuando ***a*** es negativo, es decir: ***a*** < 0. Cuanto menor sea el valor de ***a***, más cerrada será la curva. Dicho de otro modo, cuanto más próximo esté ***a*** de 0, más abierta será la curva.



El punto V se denomina vértice de la parábola y es el punto más bajo de la curva (punto mínimo) o el más alto (punto máximo).

Por tanto:

Las dos parábolas de la izquierda se corresponden con funciones del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c \quad con \quad a > 0$$

Pero el coeficiente de x^2 de la curva

izquierda es mayor que el de la derecha.
En el caso de las dos de la derecha, ocurre que $a < 0$, pero el coeficiente ***a*** de la parábola situada más a la derecha es menor que el de la izquierda.

Si observamos y seguimos con la vista una de las dos curvas de la izquierda, notamos que la curva "*baja*" (es decreciente), llega al valor mínimo (punto vértice) y luego "*sube*" (crece).
En el caso de las curvas de la derecha observamos que la curva crece, llega al máximo (vértice) y posteriormente decrece.

Obtención del vértice de una parábola:

Par obtener la gráfica de una función polínómica de grado 2, es decir, para dibujar la parábola que la representa, es importante conocer las coordenadas del vértice para poder dibujarla. Las coordenadas del vértice son fácilmente obtenibles. Veamos como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow \textit{func. polin. de grado dos.} \ (\textit{paràbola})$$

$$\textit{Vèrtice} \ \ V\left(-\tfrac{b}{2a}, f(-\tfrac{b}{2a})\right) = \left(-\tfrac{b}{2a}, c - \tfrac{b^2}{4a}\right)$$

Una vez conseguido el vértice de la parábola resulta más fácil dibujarla.

Para obtener la parábola correspondiente a una función polinómica de grado 2, distinguiremos tres casos:

Î Parábola del tipo $y = a x^2 \longleftarrow$ es decir, $b = c = 0$

En este caso el vértice coincide con el origen de coordenadas, que será el punto máximo si $a > 0$ o el mínimo si $a < 0$. En efecto:

$$V\left(-\tfrac{b}{2a}, f(-\tfrac{b}{2a})\right) = \left(-\tfrac{0}{2a}, f(-\tfrac{0}{2a})\right) = \left(0, f(0)\right) = (0,0) \leftarrow \textit{Origen}$$

$$\mapsto f(0) = a \cdot 0^2 = 0$$

Ï Parábola del tipo $y = a x^2 + c \longleftarrow$ es decir, $b = 0$

En este caso el vértice está en el eje de ordenadas. En efecto:

$$V\left(-\tfrac{b}{2a}, f(-\tfrac{b}{2a})\right) = \left(-\tfrac{0}{2a}, f(-\tfrac{0}{2a})\right) = \left(0, f(0)\right) = (0,c) \leftarrow \textit{Punto del eje de ordenadas}$$

$$\mapsto f(0) = a \cdot 0^2 + c = c$$

Ð

Parábola del tipo $y = a x^2 + b x \longleftarrow$ es decir, $c = 0$.

En este caso podemos asegurar que la curva pasa por el origen de coordenadas.
En efecto: $x = 0 \rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = 0 \ . \textit{Es decir}, \ (0,0) \in G_f$

Ñ Parábola del tipo $y = a x^2 + b x + c$

En este caso el vértice puede ser cualquier punto del plano.

En todos los casos podemos asegurar que la parábola corta al eje de ordenadas en un solo punto, mientras que al eje de abcisas puede cortarlo en ninguno, uno o dos.

Ejemplo 9.-

Vamos a representar en el mismo sistema de ejes las funciones siguientes:

Veamos: $(1):\ y = x^2 \quad ; \quad (2):\ y = 2x^2 \quad ; \quad (3): y = 0'5x^2$

Se trata de tres parábolas cuyos vértices están en el origen, siendo este el punto mínimo.
Construyamos una tabla de valores para cada una de ellas.

Parábola (1)

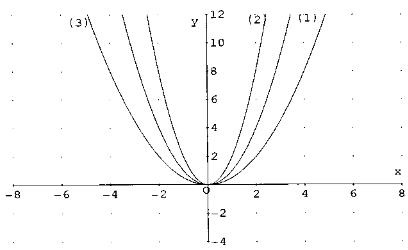
x	$y = x^2$	Puntos
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
&1	1	(&1,1)
2	4	(2,4)
&2	4	(&2,4)
3	9	(3,9)
&3	9	(&3,9)

Parábola (2)

x	$y = 2x^2$	Puntos
0	0	(0,0)
1	2	(1,2)
&1	2	(&1,2)
2	8	(2,8)
&2	8	(&2,8)
3	18	(3,18)
&3	18	(&3,18)

Parábola (3)

x	$y = 0´5x^2$	Puntos
0	0	(0,0)
1	0´5	(1,0´5)
&1	0´5	(&1,0´5)
2	2	(2,2)
&2	2	(-2,2)
3	4´5	(3,4´5)
&3	4´5	(&3,4´5)



Con las tablas de valores obtenemos las gráficas

Nótese como la parábola más abierta es la (3), que corresponde con el coeficiente de x^2 menor de los tres.
El vértice coincide con el origen de coordenadas en los tres casos.

Ejemplo 10.-

Ahora vamos a representar en el mismo sistema de ejes las funciones siguientes:

Veamos: $(1):\ y = -x^2 \quad ; \quad (2):\ y = -3x^2 \quad ; \quad (3): y = -0'25x^2$

Se trata de tres parábolas cuyos vértices están en el origen, siendo este el punto máximo.
Construyamos una tabla de valores para cada una de ellas.

Parábola (1)

x	y = &x^2	Puntos
0	0	(0,0)
1	&1	(1,&1)
&1	&1	(&1,&1)
2	&4	(2,&4)
&2	&4	(&2,&4)
3	&9	(3,&9)
&3	&9	(&3,&9)

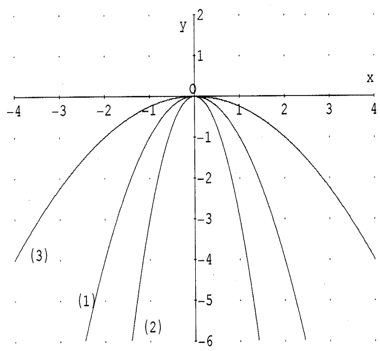
Parábola (2)

x	y = &$3x^2$	Puntos
0	0	(0,0)
1	&3	(1,&3)
&1	&3	(&1,&3)
2	&12	(2,&12)
&2	&12	(&2,&12)
3	&27	(3,&27)
&3	&27	(&3,&27)

Parábola (3)

x	$y = 0´25x^2$	Puntos
0	0	(0,0)
1	&0´25	(1,&0´25)
&1	&0´25	(&1,0´5)
2	&1	(2,&1)
&2	&1	(&2,&1)
3	&2´25	(3,&2´25)
&3	&2´25	(&3,&2´25)

Con las tablas de valores obtenemos las gráficas:



Nótese que el vértice coincide con el origen de coordenadas y es el punto máximo.

La parábola (3) es la más abierta de las tres, puesto que su coeficiente de x^2 es el más próximo a 0.

Ejemplo 11.-

En este ejemplo vamos a representar la gráfica de una función polinómica de grado 2 de la forma $y = a\,x^2 + c$, en concreto $y = 2x^2 - 5$.

Veamos:

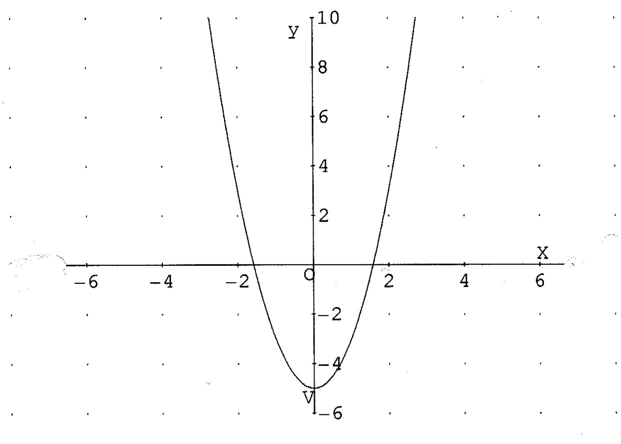
Se trata de una parábola con el vértice como punto mínimo y situado en el eje de ordenadas.

Lo primero que debemos hacer es determinar el vértice:

$$V\left(-\tfrac{b}{2a}, c - \tfrac{b^2}{4a}\right) = \left(-\tfrac{0}{4}, -5 - \tfrac{0}{8}\right) = (0, -5)$$

Una vez obtenido el vértice construimos la tabla dando valores a *x* en ambos "lados" del vértice:

x	y = 2x²&5	Puntos
0	&5	V (0,&5)
1	&3	(1,&3)
&1	&3	(&1,&3)
2	3	(2,3)
&2	3	(&2,3)
3	13	(3,13)
&3	13	(&3,&13)



Ejemplo 12.-

En este ejemplo vamos a representar una función del tipo $y = a\,x^2 + b\,x + c$

Representemos la función $y = x^2 - 4x - 5$

Veamos:

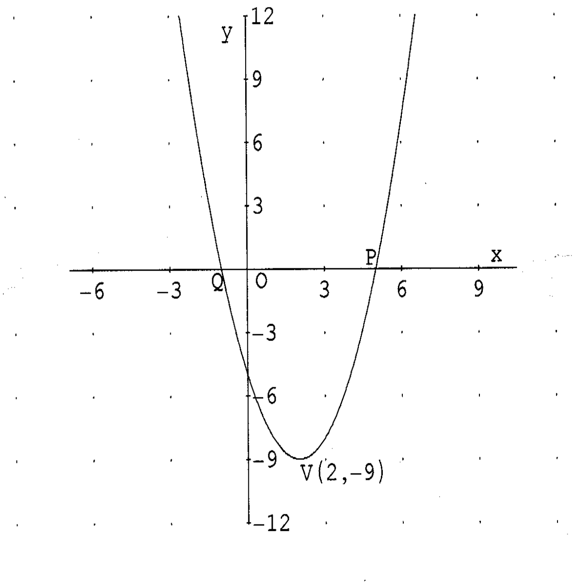
Se trata de una parábola cuyo vértice es el punto mínimo.

Comenzamos por determinar el vértice :

$$V\left(-\tfrac{b}{2a}, c - \tfrac{b^2}{4a}\right) = \left(-\tfrac{-4}{2}, -5 - \tfrac{16}{4}\right) = (2, -9)$$

Ahora construimos la tabla dándole valores a $\boldsymbol{x}$ a izquierda y derecha de $x = 2$:

x	$y = x^2$&4x&5	Puntos
2	&9	V (2,&9)
1	&8	(1,&8)
3	&8	(3,&8)
0	&5	(0,&5)
4	&5	(4,&5)
&1	0	(&1,0)
5	0	(5,0)
&2	7	(&2,7)
6	7	(6,7)



Gráfica de la función $y = x^2$&4x&5

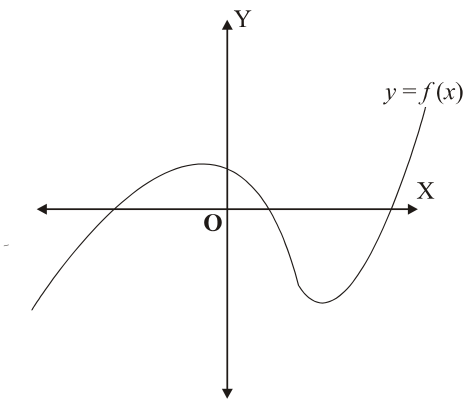
Nótese que la gráfica anterior corta al eje de abcisas en dos puntos, P(5,0) y Q(-1,0). Al eje de ordenadas lo corta en un único punto, (0,&5).

Obsérvese también que la gráfica es decreciente, alcanza el mínimo (vértice) y comienza a crecer hasta el infinito.

6.5.Gráfica de una función polinómica de grado superior a dos.-

En general, la gráfica de una función polinómica de grado 3 o superior, es una línea curva que puede tomar diversas formas. Para obtener una cantidad suficiente de puntos que nos permitan dibujar esa gráfica, se requieren nuevos conocimientos que serán estudiados en temas siguientes a este, aunque con los conceptos estudiados en este tema y en el titulado "**funciones reales de variable real**" podemos esbozar algunos aspectos que nos den una idea aproximada de esa gráfica, aunque insistimos en que la utilización de otros conceptos tales como "*límites de funciones*" y "*derivadas*" nos ayudarán a conseguir una perfección en nuestro objetivo.

Es decir:



La gráfica de la izquierda podría ser la de una función polinómica de grado mayor que 2 (e incluso la de una función no polinómica).

En ella podemos destacar lo siguiente:

T Suponiendo que la línea se prolonga hacia arriba por la derecha, se interpreta como que: $x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = +\infty$

T Suponiendo que la línea se prolonga hacia abajo por la izquierda, se interpreta como que: $x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = -\infty$

T La curva corta al eje de abcisas en tres puntos y al de ordenadas en uno.

T La curva crece, alcanza un máximo, decrece, alcanza un mínimo y crece.

7.Representación gráfica de funciones cualesquiera.-

De momento, para intentar representar una función cualquiera, debemos considerar los siguientes aspectos:

ì **Dominio:** Es importante conocer el dominio de la función puesto que en los valores x que no pertenecen al dominio no hay imagen, lo cual se traduce en que no hay gráfica, esto es, no hay curva. Se visualizaría como que la gráfica no se prolonga a lo largo de todo el eje de abcisas, esto es, puede haber puntos o intervalos del eje de abcisas en los que no haya gráfica.

Ù **Puntos de corte con los ejes:** Si somos capaces de determinar los puntos donde la gráfica corta a los ejes de coordenadas, tenemos una información que nos facilitará dibujar la curva con más precisión.

Veamos como se obtiene estos puntos.

Corte con el eje de abcisas: $y = f(x)$ es la función. Su gráfica puede que corte al eje de abcisas en ningún punto, uno, dos, tres, ..., infinitos.

Si corta en algún punto será del tipo P(x , 0), es decir:

$$P(x,0)\begin{cases} P \text{ punto de la gràfica} \\ (x,0) \in G_f \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{buscamos } x \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \text{ es una ecuaciòn. Resolvemos y obtenemos } x$$

$$\text{De este modo conseguimos } P(x,0).$$

Corte con el eje de ordenadas: $y = f(x)$ es la función. Su gráfica puede que corte al eje de ordenadas en ningún punto o en uno (no más de uno).

Si corta en algún punto será del tipo Q(0 , y), es decir:

$$Q(x,0)\begin{cases} Q \text{ punto de la gràfica} \\ (0,y) \in G_f \Rightarrow f(0) = y \quad \text{buscamos } y \end{cases}$$

$$f(0) = y \text{ Hallando la imagen de } 0 \text{ obtenemos } y.$$

$$\text{Asi conseguimos } Q(0,y).$$

Ú **Ramas parabólicas:** Supongamos que $y = f(x)$ es una función.

¿Cómo se comporta cuando x = +4 y cuando x = &4 ?

Aunque hay más situaciones, podría darse algunas de las que ahora exponemos y que identificaremos con distintos nombres.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si cuando } x = +\infty \\ \text{es } f(+\infty) = +\infty \end{array}\right\}$$ En este caso se dice que la función $y = f(x)$ tiene una rama parabólica por la derecha y hacia arriba.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si cuando } x = +\infty \\ \text{es } f(+\infty) = -\infty \end{array}\right\}$$ En este caso se dice que la función $y = f(x)$ tiene una rama parabólica por la derecha y hacia abajo.

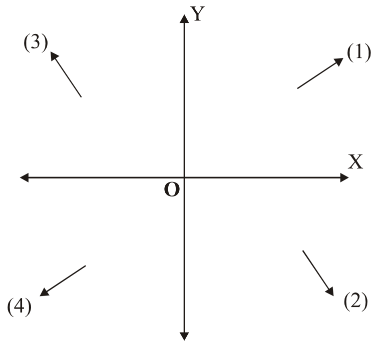
$$\left.\begin{array}{l} \text{Si cuando } x = -\infty \\ \text{es } f(-\infty) = +\infty \end{array}\right\}$$ En este caso se dice que la función $y = f(x)$ tiene una rama parabólica por la izquierda y hacia arriba.

$\left.\begin{array}{l} Si\ cuando\ x = -\infty \\ es\ f(-\infty) = -\infty \end{array}\right\}$ En este caso se dice que la función $y = f(x)$ tiene una rama parabólica por la izquierda y hacia abajo.

La interpretación gráfica de estos conceptos es la siguiente:

(1): Es el caso en que $f(+4) = +4$
(2): Es el caso en que $f(+4) = \&4$
(3): Es el caso en que $f(\&4) = +4$
(4): Es el caso en que $f(\&4) = \&4$

Las flechas del dibujo representan la tendencia aproximada de la gráfica.



Ï **Asíntotas verticales:** Supongamos que $y = f(x)$ es una función tal que:

U $f(a)$ no existe, es decir, el número a0ú no tiene imagen. Dicho de otra forma aóD_f.

U Supongamos que para valores de ***x*** infinitamente próximos a ***a*** (por su derecha y/o por su izquierda) la función existe, es decir, supongamos que ocurre alguna (o ambas) de estas situaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(a^+) \\ f(a^-) \end{array}\right\} existe$$

U Puede ocurrir que alguno (o ambos) de estos valores sea + 4 o &4. En estos casos, se dice que la función $y = f(x)$ tiene una **asíntota vertical en *x* = *a*** (o que ***x* = *a*** es una asíntota vertical). En concreto:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)\ no\ existe \\ f(a^+) = +\infty \\ f(a^-) = +\infty \end{array}\right\} (1) \left\{\begin{array}{l} En\ x = a\ hay\ \text{asintota}\ vertical\ por \\ ambos\ lados\ hacia\ arriba. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)\ no\ existe \\ f(a^+) = +\infty \\ f(a^-) = -\infty \end{array}\right\} (2) \left\{\begin{array}{l} En\ x = a\ hay\ \text{asintota}\ vertical\ por\ la\ derecha \\ hacia\ arriba\ y\ por\ la\ izquierda\ hacia\ abajo. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)\ no\ existe \\ f(a^+) = -\infty \\ f(a^-) = +\infty \end{array}\right\} (3) \left\{\begin{array}{l} En\ x = a\ hay\ \text{asintota}\ vertical\ por\ la\ derecha \\ hacia\ abajo\ y\ por\ la\ izquierda\ hacia\ arriba. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)\ no\ existe \\ f(a^+) = -\infty \\ f(a^-) = -\infty \end{array}\right\} (4) \left\{\begin{array}{l} En\ x = a\ hay\ \text{asintota}\ vertical\ por \\ ambos\ lados\ hacia\ abajo. \end{array}\right.$$

U Puede ocurrir que la asíntota sea únicamente por una lado, es decir, por un lado de $x = a$ la imagen es + 4 o &4, mientras que por el otro puede ocurrir que las imágenes sean finitas o no existen.
Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f(a) \text{ no existe} \\ f(a^+) = +\infty \\ f(a^-) \text{ no existe o es finito} \end{array}\right\} (5) \begin{cases} \textit{En } x = a \textit{ hay } \text{asintota } \textit{vertical} \\ \textit{por la derecha hacia arriba.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) \text{ no existe} \\ f(a^+) = -\infty \\ f(a^-) \text{ no existe o es finito} \end{array}\right\} (6) \begin{cases} \textit{En } x = a \textit{ hay } \text{asintota } \textit{vertical} \\ \textit{por la derecha hacia abajo.} \end{cases}$$

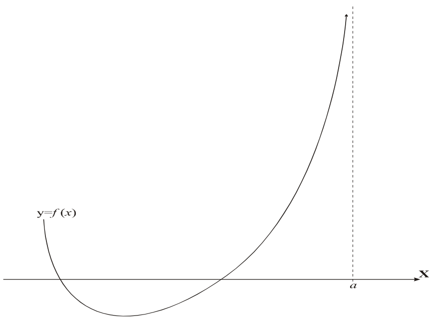
$$\left.\begin{array}{l} f(a) \text{ no existe} \\ f(a^+) \text{ no existe o es finito} \\ f(a^-) = +\infty \end{array}\right\} (7) \begin{cases} \textit{En } x = a \textit{ hay } \text{asintota } \textit{vertical} \\ \textit{por la izquierda hacia arriba.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) \text{ no existe} \\ f(a^+) \text{ no existe o es finito} \\ f(a^-) = -\infty \end{array}\right\} (8) \begin{cases} \textit{En } x = a \textit{ hay } \text{asintota } \textit{vertical} \\ \textit{por la izquierda hacia abajo.} \end{cases}$$

U En los puntos anteriores hemos indicado que $f(a)$ no existe, es decir, a0ú no tiene imagen. Pues bien, esto sería el caso más general, pero puede ser que $f(a)$ exista y se mantenga todo lo demás (por ejemplo que $f(a^+)$ = +4 y $f(a^{\&})$ = &4), en cuyo caso también se dice que $x = a$ es una asíntota vertical.

Ejemplo 13.-

En este ejemplo ponemos una gráfica ficticia de una función $y = f(x)$.



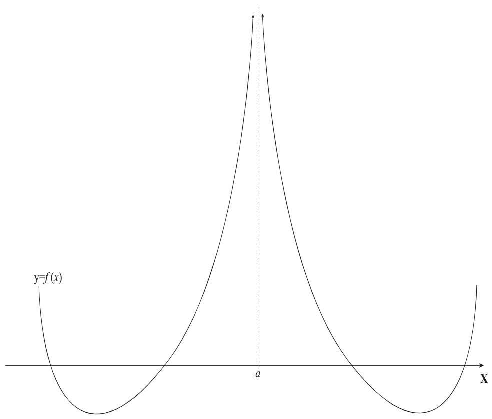
En ella se puede apreciar lo siguiente:

9 Es la situación (7) de las expuestas anteriormente. Nótese que cuanto más se aproxima ***x*** a ***a*** por su izquierda, más se aproxima $f(x)$ a +4. En el dibujo se aprecia como la gráfica de la función se "*pega*" cada vez más a la recta vertical en $x = a$

9 Según lo anterior, la función $y = f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ por la izquierda y hacia arriba.

Ejemplo 14.-

En este ejemplo ponemos otra gráfica ficticia de una función $y = f(x)$.



La gráfica se corresponde con una función del tipo (1), es decir, $x = a$ es una asíntota vertical por ambos lados hacia arriba.

Nótese que la gráfica de la función se va "*pegando*" cada vez más a la recta vertical, sin llegar nunca a tocarla, es decir, se aproxima tanto como podamos imaginar, pero nunca la toca.

ð **Asíntotas horizontales:** Supongamos que $y = f(x)$ es una función tal que:

Cuando ***x*** se hace infinitamente grande positiva o/y infinitamente grande negativa, las imágenes se aproximan cada vez más a un número fijo ***k***. Esta aproximación puede ser "*por arriba*" o "*por abajo*" y de tal modo que cuanto mas se acerque ***x*** a +4 o &4, más se aproxima su imagen $f(x)$ a ***k***, siendo esta aproximación tanta como podamos imaginar, pero sin llegar a ser igual a ***k***.

En este caso se dice que la función $y = f(x)$ Tiene una **asíntota horizontal en *y* = *k***, o también que **la recta *y* = *k* es una asíntota horizontal.**

Veamos las distintas situaciones que pueden darse:

â Cuando ***x*** se hace infinitamente grande positiva, las imágenes $f(x)$ se aproximan infinitamente a ***k*** por la derecha (por arriba, ya que ***k*** está en el eje de ordenadas). La expresión de esta idea es:

En este $x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = k^{+}$ caso se dice que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ por la derecha y de tal modo que la asíntota está por debajo de la gráfica de la función.

ã Cuando ***x*** se hace infinitamente grande positiva, las imágenes $f(x)$ se aproximan infinitamente a ***k*** por la izquierda (por abajo, ya que ***k*** está en el eje de ordenadas). La expresión de esta idea es:

$$x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = k^{-}$$

En este caso se dice que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ por la derecha y de tal modo que la asíntota está por encima de la gráfica de la función.

ä Cuando ***x*** se hace infinitamente grande negativa, las imágenes $f(x)$ se aproximan infinitamente a ***k*** por la derecha (por arriba, ya que ***k*** está en el eje de ordenadas). La expresión de esta idea es:

$$x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = k^{+}$$

En este caso se dice que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ por la izquierda y de tal modo que la asíntota está por debajo de la gráfica de la función.

å Cuando ***x*** se hace infinitamente grande negativa, las imágenes $f(x)$ se aproximan infinitamente a ***k*** por la izquierda (por abajo, ya que ***k*** está en el eje de ordenadas). La expresión de esta idea es:

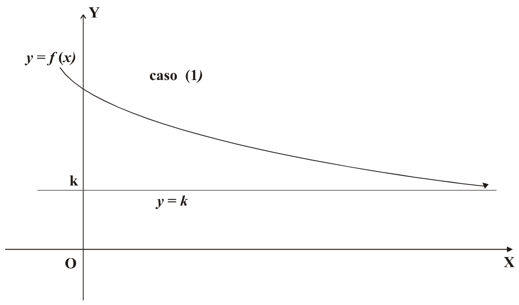
$$x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = k^{-}$$

En este caso se dice que la recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función $y = f(x)$ por la izquierda y de tal modo que la asíntota está por encima de la gráfica de la función.

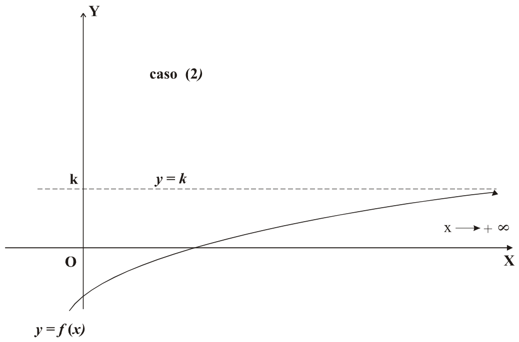
Puede ocurrir que se de el caso de que una función tenga la misma asíntota horizontal por la derecha y por la izquierda o que sólo tenga asíntota por uno de los lados. También puede ocurrir que tenga una asíntota por la derecha y otra distinta por la izquierda.

Veamos ahora las distintas interpretaciones gráficas de los cuatro casos:

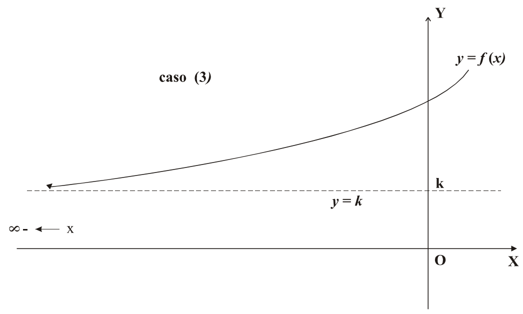
Caso Î :
Observa que cuando x se hace infinitamente grande positivo, sus imágenes se aproximan a k por su derecha (por arriba). Gráficamente se interpreta como que la gráfica de la función se aproxima cada vez más a la recta $y = k$, pero nunca llega a tocarla.



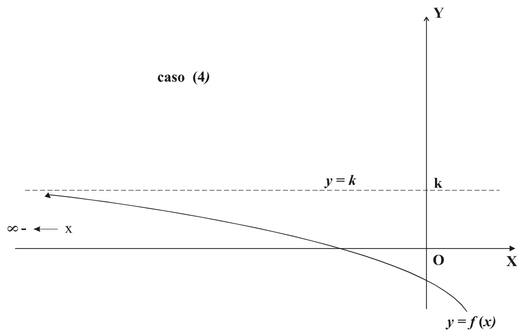
Caso Ï :
Observa que cuando x se hace infinitamente grande positivo, sus imágenes se aproximan a k por su izquierda (por abajo). Gráficamente se interpreta como que la gráfica de la función se aproxima cada vez más a la recta $y = k$, pero nunca llega a tocarla.



Caso Ð:
Observa que cuando x se hace infinitamente grande negativo, sus imágenes se aproximan a k por su derecha (por arriba). Gráficamente se interpreta como que la gráfica de la función se aproxima cada vez más a la recta $y = k$, pero nunca llega a tocarla.



Caso Ñ:
Observa que cuando x se hace infinitamente grande negativo, sus imágenes se aproximan a k por su izquierda (por abajo). Gráficamente se interpreta como que la gráfica de la función se aproxima cada vez más a la recta $y = k$, pero nunca llega a tocarla.



Ý **Asíntotas oblicuas:** Supongamos una función $y = f(x)$ y una recta $\boldsymbol{r}$ del plano que se corresponderá con una función del tipo $y = g(x) = ax + b$. La recta $\boldsymbol{r}$ es oblicua, es decir, no es horizontal, lo que significa que el coeficiente $\boldsymbol{a}$ es distinto de cero (a...0).

Supongamos que cuando $\boldsymbol{x}$ se hace infinitamente grande positiva y/o negativa, las imágenes de esas $\boldsymbol{x}$ mediante las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ están infinitamente próximas, es decir $f(x)$ • $g(x)$ cuando x = %4 o/y x =&4.

La interpretación gráfica de lo mencionado en el párrafo anterior es que las gráficas de ambas funciones, la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ se aproximan entre sí cada vez más, a medida que ***x*** se hace infinitamente grande positiva y/o negativa, siendo esta aproximación tanta como podamos imaginar, pero sin llegar nunca a tocarse.

Pues bien, en este caso, se dice que la recta ***r*** es una **asíntota oblicua** de la función $y = f(x)$. Las posiciones de la función y su asíntota pueden ser de alguna de las siguientes formas:

$$(1)\quad Si\ cuando\ x = +\infty\ \ ocurre\ que \begin{cases} f(+\infty) = +\infty\ \ ;\ g(+\infty) = +\infty \\ \qquad y \\ f(x) \approx g(x) \end{cases}$$

En este caso, la asíntota oblicua es ***por la derecha*** y ***hacia arriba***.

$$(2)\quad Si\ cuando\ x = +\infty\ \ ocurre\ que \begin{cases} f(+\infty) = -\infty\ \ ;\ g(+\infty) = -\infty \\ \qquad y \\ f(x) \approx g(x) \end{cases}$$

En este caso, la asíntota oblicua es ***por la derecha*** y ***hacia abajo***.

$$(3)\quad Si\ cuando\ x = -\infty\ \ ocurre\ que \begin{cases} f(-\infty) = +\infty\ \ ;\ g(-\infty) = +\infty \\ \qquad y \\ f(x) \approx g(x) \end{cases}$$

En este caso, la asíntota oblicua es ***por la izquierda*** y ***hacia arriba***.

$$(4)\quad Si\ cuando\ x = -\infty\ \ ocurre\ que \begin{cases} f(-\infty) = -\infty\ \ ;\ g(-\infty) = -\infty \\ \qquad y \\ f(x) \approx g(x) \end{cases}$$

En este caso, la asíntota oblicua es ***por la izquierda*** y ***hacia abajo***.

La gráfica de la función puede ir por ***"encima"*** o por ***"debajo"*** de la asíntota. Veamos:

X Si $f(x)$ • $g(x)$, pero $f(x) > g(x)$ (dicho de otro modo, $f(x)$ / $g(x)$), entonces la gráfica de la función "***está por encima***" de la asíntota ***r***.

X Si $f(x)$ • $g(x)$, pero $f(x) < g(x)$ (dicho de otro modo, $f(x)$. $g(x)$), entonces la gráfica de la función "***está por debajo***" de la asíntota ***r***.

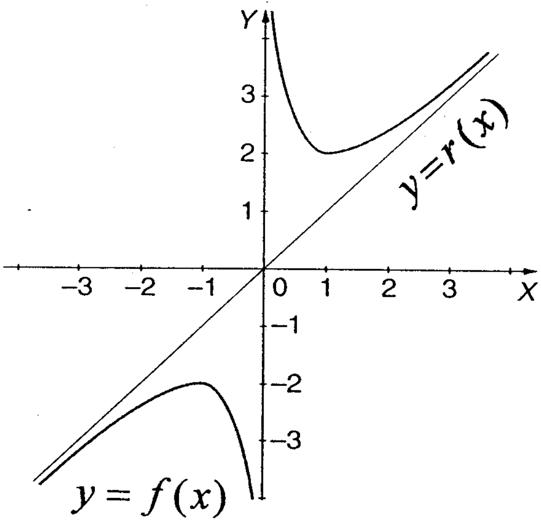
Ejemplo 15.-

Supongamos que representamos (ayudado por un programa informático o empleando los conocimientos que aprenderemos en temas sucesivos) las funciones siguientes:

$(\bullet)\ \ y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}\quad que\ se\ trata\ de\ una\ \ funcion\ racional.$

$(\bullet\bullet)\ \ y = r(x) = x\quad que\ se\ trata\ de\ una\ \ función\ \ polinòmica\ de\ grado\ 1\ (recta)$

La representación de ambas en el mismo sistema de ejes queda:



En la gráfica se observa:

l El eje de ordenadas ($x = 0$)es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$. La posición es **por la derecha hacia arriba** y **por la izquierda hacia abajo**.

l La recta $\boldsymbol{y = x}$ (recta $\boldsymbol{r}$) es una asíntota oblicua de la función $y = f(x)$. La posición es **por la derecha hacia arriba** y **por la izquierda hacia abajo**, es decir, la asíntota es por ambos lados.

l Notese lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)\ \textit{no existe} \\ f(0^+) = +\infty \quad y \quad f(0^-) = -\infty \end{array}\right\}$$

$$x = +\infty \begin{cases} f(+\infty) = +\infty \ ; \ r(+\infty) = +\infty \\ f(x) \approx r(x), \ \textit{pero} \ \ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$x = -\infty \begin{cases} f(-\infty) = -\infty \ ; \ r(-\infty) = -\infty \\ f(x) \approx r(x), \ \textit{pero} \ \ f(x) < g(x) \end{cases}$$

La gráfica de la función se aproxima cada vez más a las asíntotas, pero nunca llega a tocarlas. La aproximación es tanta como podamos imaginar, es decir, cuanto más cerca esté x de 0 (x...0), más "*pegadas*" están la asíntota vertical y la gráfica y cuanto más próximo este x de +4 o de &4, más "*pegadas*" están la asíntota oblicua y la función $y = f(\mathrm{x})$.

Hagamos algunas comprobaciones con la calculadora:

] Comprobación de la asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0} \in \mathrm{R}. \ \textit{Es decir}, \ 0 \in D_f \\ x = 0^+ \rightarrow f(0^+) = \dfrac{(0^+)^2+1}{0^+} = \dfrac{0^+ + 1}{0^+} = \dfrac{1^+}{0^+} = +\infty \\ x = 0^- \rightarrow f(0^-) = \dfrac{(0^-)^2+1}{0^-} = \dfrac{0^+ + 1}{0^-} = \dfrac{1^+}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$

Por ejemplo:

$$x = 0'001 \rightarrow f(0'001) = \frac{0'000001+1}{0'001} = 1000'001$$

$$x = 0'0001 \rightarrow f(0'0001) = \frac{0'00000001+1}{0'0001} = 10000'0001$$

$$x = -0'001 \rightarrow f(-0'001) = \frac{0'000001+1}{-0'001} = -\ 1000'001$$

$$x = -0'0001 \rightarrow f(-0'0001) = \frac{0'00000001+1}{-0'0001} = -\ 10000'0001$$

] Comprobación de la asíntota oblicua:

$$f(+\infty) = \tfrac{(+\infty)^2+1}{+\infty} = +\ \infty \quad y \quad r(+\infty) = +\infty$$

$$x = 1000 \rightarrow \begin{cases} f(1000) = \dfrac{1000^2+1}{1000} = \dfrac{1000001}{1000} = 1000'001 \\ r(1000) = 1000 \\ f(1000) \approx r(1000) \quad con \quad f(1000) > r(1000) \end{cases}$$

$$f(-\infty) = \tfrac{(-\infty)^2+1}{-\infty} = \tfrac{+\infty^2+1}{-\infty} = -\infty \quad y \quad r(-\infty) = -\infty$$

$$x = -1000 \rightarrow \begin{cases} f(-1000) = \dfrac{(-1000)^2+1}{-1000} = \dfrac{1000001}{-1000} = -1000'001 \\ r(-1000) = -1000 \\ f(-1000) \approx r(-1000) \quad con \quad f(1000) < r(1000) \end{cases}$$

En apartados sucesivos veremos representaciones gráficas de algunos tipos de funciones que puedan hacerse con los conocimientos adquiridos, dejando para más adelante la representación de funciones más complejas.

8.Representación gráfica de funciones racionales fraccionarias.-

Recordemos que funciones algebraicas racionales fraccionarias son aquellas que tenían la forma siguiente (ver tema "***funciones reales de variable real***"):

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k}$$

donde puede apreciarse que el numerador y denominador son funciones polinómicas.

Veremos únicamente casos sencillos, dejando los más complicados para después de haber visto las ***aplicaciones de las derivadas*** para el estudio y representación de funciones.

8.1.Gráfica de las funciones racionales fraccionarias del tipo $y = f(x) = \frac{k}{x}$.-

Supongamos una función del tipo $\left.\begin{array}{l} f: \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \dfrac{k}{x} \end{array}\right\}$ *siendo* $k \in \mathrm{R}$ *un numero* constante.

En este tipo de funciones destacamos lo siguiente:

- **Dominio**: El único número que no tiene imagen es $x = 0$.

  Por tanto: $D_f = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- **Asíntotas verticales:** En $x = 0$ no hay imagen, pero, ¿qué ocurre en las proximidades de $x = 0$? Vamos a verlo:

$$\begin{cases} x = 0^+ \rightarrow f(0^+) = \dfrac{k}{0^+} = \begin{cases} +\infty & si \ \ k > 0 \\ -\infty & si \ \ k < 0 \end{cases} \\ x = 0^- \rightarrow f(0^-) = \dfrac{k}{0^-} = \begin{cases} -\infty & si \ \ k > 0 \\ +\infty & si \ \ k < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Es decir:

Î Si k>0, entonces el eje de ordenadas es una asíntota vertical por la derecha hacia arriba y por la izquierda hacia abajo.

Ï Si k<0, entonces el eje de ordenadas es una asíntota vertical por la derecha hacia abajo y por la izquierda hacia arriba.

Ð Se dice que la **recta $x = 0$** es una asíntota vertical

H **Asíntotas horizontales:** ¿Qué ocurre cuando *x* se hace infinitamente grande positivo o infinitamente grande negativo? Veamos:

$$Si \ \ k > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = \dfrac{k}{+\infty} = 0^+ \\ x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = \dfrac{k}{-\infty} = 0^- \end{cases} \qquad Si \ \ k < 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = \dfrac{k}{+\infty} = 0^- \\ x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = \dfrac{k}{-\infty} = 0^+ \end{cases}$$

E
s decir:

Î Si k>0, cuando *x* se hace infinitamente grande positiva, las imágenes están infinitamente próximas a 0 por su derecha (por arriba) y cuando *x* se hace infinitamente grande negativa, las imágenes de esas *x* están infinitamente próximas a 0 por su izquierda (por abajo). Esto se interpreta como que el eje de abcisas es una asíntota horizontal de la función $y = f(x) = \frac{k}{x}$ por la derecha y por la izquierda. Por la derecha la asíntota está situada por debajo de la función y por la izquierda lo está por encima.

Ï Si k<0, cuando *x* se hace infinitamente grande positiva, las imágenes están infinitamente próximas a 0 por su izquierda (por abajo) y cuando *x* se hace infinitamente grande negativa, las imágenes de esas *x* están infinitamente próximas a 0 por su derecha (por arriba). Esto se interpreta como que el eje de abcisas es una asíntota horizontal de la función $y = f(x) = \frac{k}{x}$ por la derecha y por la izquierda. Por la derecha la asíntota está situada por encima de la función y por la izquierda lo está por abajo.

H **Puntos de corte con los ejes:** Veamos si la gráfica de $y = f(x) = \frac{k}{x}$ corta a los ejes.

R **Corte con el eje de abcisas:**

$$P(a,0) \ \ siendo \ \ f(a) = 0 \rightarrow \ Buscamos \ el \ valor \ de \ a$$

$$\frac{k}{a} = 0 \rightarrow \ ecuaciòn \ \ (no \ olvidar \ que \ k \neq 0)$$

La ecuación anterior no tiene solución, es decir: òa 0 ú * $f(a) = 0$.

Por tanto, la gráfica de $y = f(x) = \frac{k}{x}$ no corta al eje de abcisas.

R **Corte con el eje de ordenadas:**

$$Q(0,b) \ \ siendo \ \ b = f(0). \ \ Pero \ \ f(0) = \frac{k}{0} \notin R$$

Es decir, òb 0 ú * $b = f(0)$. Por tanto, la gráfica no corta el eje de OY.

Ejemplo 16.-

Vamos a representar gráficamente la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

Q **Dominio**: El único número que no tiene imagen es 0. Por tanto: $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Q **Asíntotas verticales**: Hemos visto que para $x = 0$ no existe función (no existe imagen). Veamos que ocurre en las proximidades de $x = 0$.

$$\begin{cases} x = 0^+ \to f(0^+) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ x = 0^- \to f(0^-) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

El eje de ordenadas es una asíntota vertical por ambos lados. Nótese que por la derecha de 0 la asíntota es por "*arriba*" y por la izquierda de 0 es por "*abajo*".

Por tanto: La recta $x = 0$ es una asíntota vertical por ambos lados.

Q **Asíntotas horizontales**: Veamos que ocurre cuando x se hace %4 o &4.

$$\begin{cases} x = +\infty \to f(+\infty) = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \\ x = -\infty \to f(-\infty) = \dfrac{1}{-\infty} = 0^- \end{cases}$$

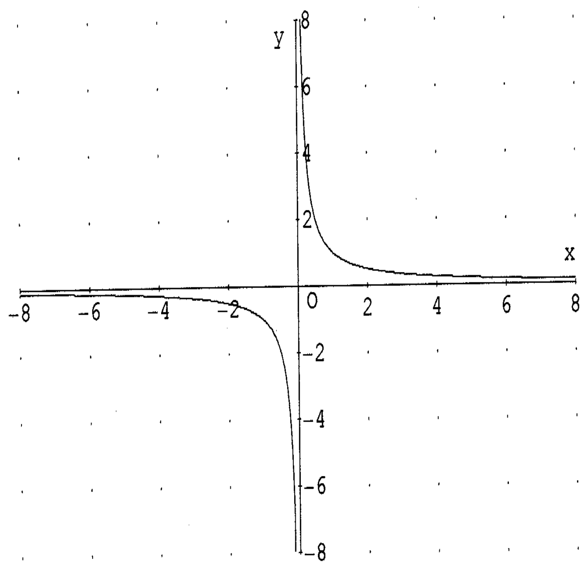
El eje de abcisas es una asíntota horizontal por ambos lados. Por la derecha, la asíntota está "*por debajo*" de la gráfica de la función y por la izquierda, está "*por encima*"

Por tanto: La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por ambos lados..

Para dibujar la gráfica es conveniente construir una tabla de valores. La dividimos en varias partes:

x	$y = 1/x$	$x = 0^+$	$y = 1/x$	$x = 0^&$	$y = 1/x$	x=+4	$y = 1/x$	x=&4	$y = 1/x$
1	1	0´1	10	&0´1	&10	10	0´1	&10	&0´1
&1	&1	0´01	100	&0´01	&100	100	0´01	&100	&0´01
2	0´5	0´001	1000	&0´001	&1000	1000	0´001	&1000	&0´001
&2	&0´5	0´0001	10000	&0´0001	&10000	10000	0´0001	&10000	&0´0001
0´5	2	!	!	!	!	!	!	!	!
&0´5	&2	!	!	!	!	!	!	!	!
4	0´25	!	!	!	!	!	!	!	!
&4	&0´25	!	!	!	!	!	!	!	!
0´25	4	9	9	9	9	9	9	9	9
&0´25	&4	0^+	+4	$0^&$	&4	+4	0^+	&4	$0^&$

Con los datos obtenidos y reflejados en la tabla, podemos representar la gráfica de la función. Nosotros lo haremos ayudado de un programa informático:



Hemos dibujado la gráfica ayudado por el programa DERIVE y en ella debe apreciarse que:

L El eje de ordenadas es una asíntota vertical por ambos lados.

L El eje de abcisas es una asíntota horizontal por ambos lados.

L La gráfica no corta a ninguno de los ejes.

L La gráfica es decreciente. En x=0 se produce un salto de tamaño infinito (pasa de &4 a %4) y vuelve a decrecer.

8.2.Gráfica de las funciones racionales fraccionarias cualesquiera.-

Son funciones racionales fraccionarias aquellas del tipo :

$$y = r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{siendo } f(x) \textit{ y } g(x) \textit{ funciones polinòmicas.}$$

Ejemplo 17.-

Son funciones racionales fraccionarias las siguientes:

$$y = \frac{-5}{2x-8} \quad ; \quad y = \frac{3x+1}{x^2+1} \quad ; \quad y = \frac{3x^3-5x^2+x-2}{5x^2-3x+3} \quad ; \quad y = \frac{8}{x^2}$$

Para representar gráficamente una función de este tipo, se actúa del mismo modo que hicimos en el caso de la función del tipo $y = \frac{k}{x}$.

Veamos con un ejemplo, la gráfica de una función del tipo $y = \frac{k}{ax+b}$

Ejemplo 18.-

Dibujemos la gráfica de la función racional fraccionaria $y = f(x) = \frac{-2}{2x-6}$

Veamos:

3 **Dominio:** x no tiene imagen si $2x$ & 6 = 0.

x no tiene imagen si $2x = 6$. Por tanto, $x = 3$ no tiene imagen.

Por tanto: D_f = ú&{3} = (&4 , 3)c(3 , + 4)

Ya sabemos que para $x = 3$ no hay imagen, pero, ¿qué ocurre en las proximidades de $x = 3$? Es decir, qué ocurre para $x = 3^+$ y para x = 3^&?. Veamos:

3 **Asíntotas verticales:** Es evidente que en $x = 3$ tenemos *"posible"* asíntota vertical.

$f(3)$ no existe ; $f(3^+) = ?$; f(3^&) = ?

$$x = \textit{próximo a } 3 \begin{cases} x = 3^+ \rightarrow f(3^+) = \dfrac{-2}{2\cdot(3^+) - 6} = \dfrac{-2}{6^+ - 6} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty \\ x = 3^- \rightarrow f(3^-) = \dfrac{-2}{2\cdot(3^-) - 6} = \dfrac{-2}{6^- - 6} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

Observamos que:

Q “*para valores de x infinitamente próximos a 3 por su derecha, las imágenes de esos valores son infinitamente grandes negativos*”

Q “*para valores de x infinitamente próximos a 3 por su izquierda, las imágenes de esos valores son infinitamente grandes positivas*”

Por tanto: La recta **$x = 3$** es una asíntota vertical por ambos lados. Por la derecha es hacia abajo y por la izquierda es hacia arriba.

3 **Asíntotas horizontales:** Veamos el comportamiento de la función cuando x es ± 4

$$\begin{cases} x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = \dfrac{-2}{2\cdot(+\infty) - 6} = \dfrac{-2}{+\infty - 6} = \dfrac{-2}{+\infty} = 0^- \\ x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = \dfrac{-2}{2\cdot(-\infty) - 6} = \dfrac{-2}{-\infty - 6} = \dfrac{-2}{-\infty} = 0^+ \end{cases}$$

Observamos que:

ú “*para valores de x infinitamente grandes positivos, las imágenes de esos valores están infinitamente próximos a 0 por su izquierda (por abajo)*”

ú “*para valores de x infinitamente grandes negativos, las imágenes de esos valores están infinitamente próximos a 0 por su derecha (por arriba)*”

Por tanto: La recta $y = 0$ (eje de abcisas) es una asíntota horizontal por ambos lados. Por la derecha, la asíntota está “*por encima*” de la gráfica y por la izquierda está “*por debajo*”.

3 **Puntos de corte de la gráfica con los ejes:**

Corte con eje de abcisas: $P(x,0) \leftarrow f(x) = 0$

$\frac{-2}{2x-6} = 0 \rightarrow$ ecuación sin solución. No corta.

Corte con eje de ordenadas: $Q(0,y) \leftarrow f(0) = y$

$\frac{-2}{2\cdot 0-6} = \frac{1}{4} = 0'\widehat{3} \rightarrow$ *Corta en* $Q(0{,}0'25)$

Construyamos unas tablas de valores:

x	3	4	2	5	1	6	0
$y = \frac{-2}{2x-6}$	no existe	&1	1	&0´5	0´5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$x = 3^+$	3´1	3´01	3´001	3´0001	3´00001	þþþ	3^+
$y = \frac{-2}{2x-6}$	&10	&100	&1000	&10000	&100000	þþþ	&4

$x = 3^{\&}$	2´9	2´99	2´999	2´9999	2´99999	þþþ	$3^{\&}$
$y = \frac{-2}{2x-6}$	10	100	1000	10000	100000	þþþ	+ 4

x = +4	8	53	503	5003	50003	þþþ	+4
$y = \frac{-2}{2x-6}$	&0´2	&0´02	&0´002	&0´0002	&0´00002	þþþ	0&

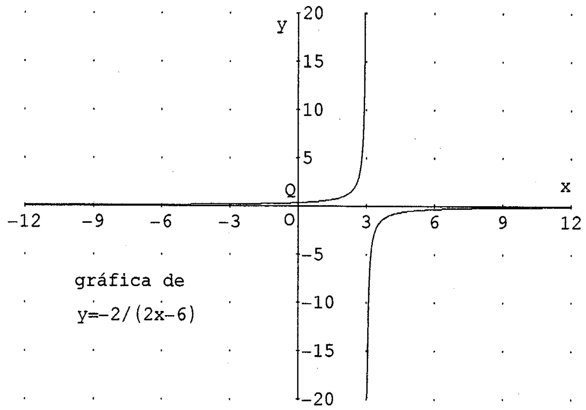
x = &4	&47	&497	&4997	&49997	&499997	þþþ	&4
$y = \frac{-2}{2x-6}$	0´02	0´002	0´0002	0´00002	0´000002	þþþ	0^+

Con las ideas sobre las asíntotas y los valores de las tablas, dibujamos la gráfica:

En la gráfica de la derecha podemos observar como la función tiene una asíntota vertical en x = 3, aunque no la hemos dibujado. Nótese como esta asíntota es por la derecha hacia abajo y por la izquierda hacia arriba.

También puede observarse como el eje de abcisas es una asíntota horizontal por ambos lados.

Nótese el punto de corte con el eje de ordenadas.



Ejemplo 19.-

Vamos a dibujar la gráfica de la función $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

4 **Dominio:** Para x = &2 no existe imagen. Por tanto:

$$D_f = \mathrm{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

4 **Asíntotas verticales:** En los puntos donde se anula el denominador, tenemos posibles asíntotas verticales. Por tanto, en x = &2 posible asíntota vertical.
Veamos:

$$x = próximo\ a\ -2 \begin{cases} x = -2^+ \to f(-2^+) = \dfrac{2\cdot(-2^+)+3}{-2^+ + 2} = \dfrac{-4^+ + 3}{0^+} = \dfrac{-1^+}{0^+} = -\infty \\ x = -2^- \to f(-2^-) = \dfrac{2\cdot(-2^-)+3}{-2^- + 2} = \dfrac{-4^- + 3}{0^-} = \dfrac{-1^-}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

Según lo anterior tenemos que:

û La recta x = &2 es una asíntota vertical por ambos lados.

û La asíntota vertical es por la derecha hacia abajo y por la izquierda hacia arriba.

4 **Asíntotas horizontales:** Veamos que ocurre cuando x es +4 o &4.

$$\begin{cases} x=+\infty \to f(+\infty)=\dfrac{2\cdot(+\infty)+3}{+\infty+2}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=2 \to (2^-) \ \ (*) \\ x=-\infty \to f(-\infty)=\dfrac{2\cdot(-\infty)+3}{-\infty+2}=\dfrac{-\infty}{-\infty}=2 \ \to (2^+) \ \ (**) \end{cases}$$

Expliquemos (() y ((():

(() Observa que cuando x es infinitamente grande positivo, el numerador es aproximadamente el doble que el denominador, pero "*un poco*" menor del doble, por lo que el cociente es $2^{\&}$

((() Observa que cuando x es infinitamente grande negativo, el numerador es aproximadamente el doble que el denominador, pero "*un poco*" mayor, por lo que el cociente es 2^+

Conclusión: La recta $y=2$ es una asíntota horizontal por ambos lados. Por la derecha, la asíntota está por encima de la gráfica de $y=f(x)$, mientras que por la izquierda, está por debajo.

4 **Puntos de corte con los ejes:**

Corte con eje OX: $P(x,0)\to f(x)=0$

$$\frac{2x+3}{x+2}=0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x=\tfrac{-3}{2} \Rightarrow P(\tfrac{-3}{2},0)$$

Corte con eje OY: $Q(0,y)\to f(0)=y$

$$\frac{2\cdot 0+3}{0+2}=\frac{3}{2} \ \Rightarrow Q(0,\tfrac{3}{2})$$

Por tanto: Corta al eje de abcisas en $P(-\tfrac{3}{2},0)$ y al de ordenadas en $Q(0,\tfrac{3}{2})$

Construyamos unas tablas de valores antes de la representación gráfica:

x	&2	&1	&3	0	&4	1	&5	2	&6	3	&7
$y=\frac{2x+3}{x+2}$	no existe	1	3	1´5	2´5	$1'\widehat{6}$	$2'\widehat{3}$	1´75	2´25	1´8	2´2

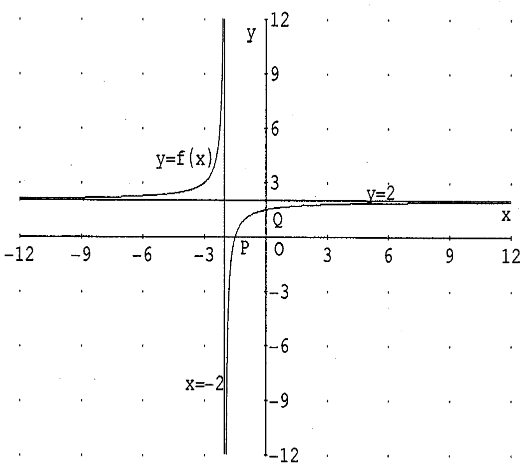
$x=\&2^+$	&1´9	&1´99	&1´999	&1´9999	&1´99999	&1´999999	þþþ	$\&2^+$
$y=\frac{2x+3}{x+2}$	&8	&98	-998	&9998	&99998	&999998	þþþ	& 4

$x=\&2^{\&}$	&2´1	&2´01	&2´001	&2´0001	&2´00001	&2´000001	þþþ	$\&2^{\&}$
$y=\frac{2x+3}{x+2}$	12	102	1002	10002	100002	1000002	þþþ	+ 4

$x=+$ 4	8	98	998	9998	99998	999998	þþþ	+ 4
$y=\frac{2x+3}{x+2}$	1´9	19´9	199´9	1999´9	19999´9	199999´9	þþþ	+ 4

$x=$ & 4	&12	&102	&1002	&10002	&100002	&1000002	þþþ	& 4
$y=\frac{2x+3}{x+2}$	2´1	2´01	2´001	2´0001	2´00001	2´000001	þþþ	2^+

Dibujamos la gráfica:



En la gráfica de la izquierda hemos representado la función $y = \frac{2x+3}{x+2}$. También se dibujan las rectas que representan a la asíntota horizontal $y = 2$ y a la vertical $x = $&3.

Nótense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.

Obsérvese como la gráfica es creciente, se produce un salto desde +4 a &4 en el punto $x = 3$ y sigue creciendo.

Ejemplo 20.-

Representemos gráficamente la función $y = g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Veamos:

Se trata de una función racional fraccionaria.

9 **Dominio:** La única forma de que un número x no tenga imagen es que el denominador sea cero. Por tanto:

$$x^2 + 1 = 0 \leftarrow \textit{ecuaciòn.}$$

$$x^2 = -1 \leftarrow \textit{no tiene soluciòn.} \Rightarrow D_g = \mathrm{R} = (-\infty, +\infty)$$

9 **Puntos de corte con los ejes:**

Corte con eje OX $\rightarrow P(x,0)$

$$g(x) = 0 \;\; ; \;\; \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \; ; \; x^2 = 0 \;\; ; \; x = 0 \Rightarrow P(0,0)$$

Corte con eje OY $\rightarrow Q(0,y)$

$$g(0) = y \;\; ; \;\; \frac{0^2}{0^2+1} = 0 \Rightarrow y = 0 \;\Rightarrow\; Q(0,0)$$

Por tanto, corta a ambos ejes en el punto O(0,0) , es decir, en el origen de coordenadas.

9 **Asíntotas verticales:**

Dado que el denominador de la función no se anula en ningún valor de ***x*** y que el dominio es todo ú, podemos asegurar que **no existen** asíntotas verticales.

9 **Asíntota horizontales:** Veamos lo que ocurre cuando ***x*** es +4 o &4.

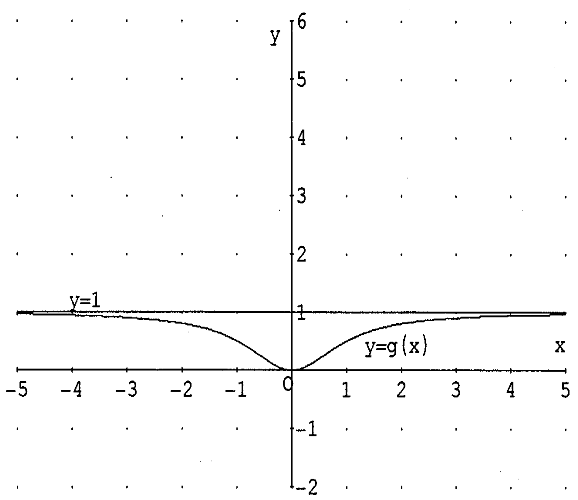
$$\begin{cases} x = +\infty \rightarrow f(+\infty) = \dfrac{(+\infty)^2}{(+\infty)^2+1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \cong 1 \rightarrow (1^-) \;\; (*) \\ x = -\infty \rightarrow f(-\infty) = \dfrac{(-\infty)^2}{(-\infty)^2+1} = \dfrac{(+\infty)^2}{(+\infty)^2+1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \cong 1 \rightarrow (1^-) \;\; (**) \end{cases}$$

(() Nótese que cuando $x = +4$ el numerador y denominador son infinitamente grandes positivos y aproximadamente iguales ($4^2 \bullet 4^2+1$), pero el denominador es "*un poco*" mayor que el numerador, por lo que el cociente es un número infinitamente próximo a 1 por su izquierda.

((() Nótese que cuando $x = \&4$ el numerador y denominador son infinitamente grandes positivos y aproximadamente iguales ($4^2 \bullet 4^2+1$), pero el denominador es "*un poco*" mayor que el numerador, por lo que el cociente es un número infinitamente próximo a 1 por su izquierda.

Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por ambos lados. La asíntota está por encima de la gráfica de la función.

Ayudado de un programa informático, representamos la función:



En la gráfica de la izquierda, correspondiente a la función $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ podemos apreciar como todo número real x tiene imagen, la asíntota horizontal (que hemos dibujado) y su posición con respecto a la gráfica de $y = g(x)$.
Nótese como corta a los ejes en el origen de coordenadas.
Observando la gráfica de izquierda a derecha vemos como decrece, alcanza un punto mínimo en O(0,0) y posteriormente crece, acercándose infinitamente al valor $y = 1$.

9.Representación gráfica de funciones irracionales y trascendentes.-

La representación gráfica de funciones irracionales (aquellas en las que la variable independiente x aparece bajo un radical) y las de las funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) se hace bajos los mismos criterios que hemos empleado en los casos anteriores, aunque generalmente requieren un estudio ligeramente distinto, por lo que dejaremos dicho estudio para temas sucesivos.

Recordemos nuevamente que las aplicaciones de los límites de funciones y de las derivadas, así como de ciertos teoremas basados en estas, son de mucha utilidad para el estudio y representación gráfica de funciones que no son tan sencillas de estudiar como las que hemos visto con anterioridad.

Seguiremos viendo en el presente tema funciones cuyo estudio y representación gráfica no requieren conocimientos más elevados.

10.Funciones dadas por intervalos. Gráficas.-

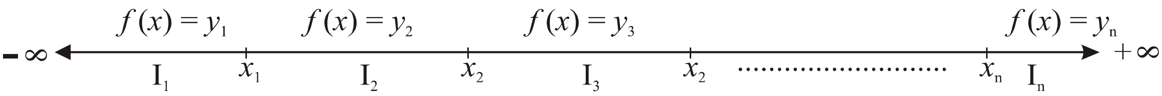
Una función real de variable real está dada por intervalos cuando el conjunto inicial ú está dividido en intervalos y la función en cada uno de ellos tiene una forma y aspecto distinto (o puede que no exista o no esté definida). Esto repercute gráficamente en que la gráfica de la función se obtiene de forma distinta según el intervalo que consideremos.

Generalmente una función dada por intervalo se define del siguiente modo:

$$f(x)=\begin{cases} una\ fòrmula & si \quad x \in \mathrm{I}_1 \\ otra\ fòrmula & si \quad x \in \mathrm{I}_2 \\ otra\ formula & si \quad x \in \mathrm{I}_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ otra\ fòrmula & si \quad x \in \mathrm{I}_n \end{cases}$$

Siendo I_1 , I_2 , I_3 , ... , I_n intervalos de números reales.
Si en algún intervalo la función no existe o no está definida, puede omitirse esa línea.

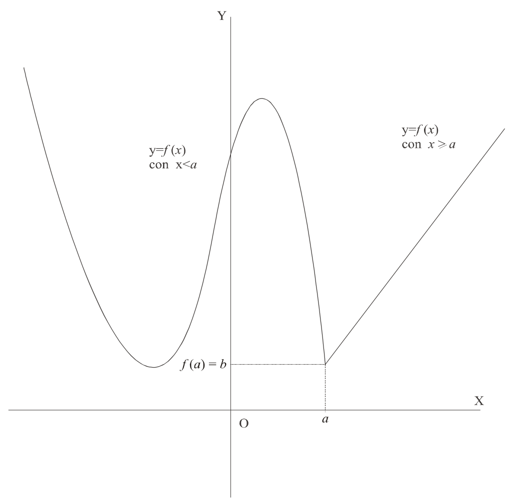
Gráficamente sería:



Las expresiones $y_1 = f(x)$; $y_2 = f(x)$; $y_3 = f(x)$; .... nos indican que son fórmulas distintas para la función, según se encuentre x en cada intervalo I_1 ; I_2 ; I_3 ; .....

Un caso de función dada por intervalo (en este caso dos intervalos), podría ser:

$$f(x)=\begin{cases} func.\ polin.\ de\ grado\ 4 \quad si \quad x < a \\ func.\ polin.\ de\ grado\ 1 \quad si \quad x \geq a \end{cases}$$



Su gráfica podría ser algo parecido a la de la derecha.
En este caso observa que:

$f(a) = b$, es decir, a 0 Df
$f(a^{\&}) = b^+$ y $f(a^+) = b^+$
A la izquierda de $x = a$ la gráfica es una línea curva y a la derecha es una recta.

Ejemplo 21.-

Consideremos la siguiente función dada por intervalos:

$$f(x)=\begin{cases} x+8 & si \quad x<-3 \\ x^2-4 & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ -2 & si \quad x>3 \end{cases}$$

Observamos los siguiente:

¸ En el intervalo abierto (&4 , &3) la función es del tipo polinómica de grado 1. Su gráfica en ese intervalo será un recta creciente (ya que el coeficiente de x es 1>0)

¸ En el intervalo cerrado [&3 , 3] la función es del tipo polinómica de grado 2. Su gráfica será una parábola cuyo vértice es un punto mínimo (ya que el coeficiente de x^2 es 1>0).

¸ En el intervalo abierto (3 , +4) la función es polinómica de grado 0. Su gráfica es una recta paralela al eje de abcisas.

¸ Observamos que todo número real tiene imagen, es decir: œ*x*0ú , › *f* (*x*)
Por tanto, el dominio es D_f = ú = (&4 , +4).

¸ En los puntos *x* = &3 y *x* = 3 es donde la función cambia de aspecto. Veamos las imágenes en esos puntos:

$$\begin{cases} f(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \\ f(3) = 3^2 - 5 = 9 - 4 = 5 \end{cases}$$

¸ Como en *x* = &3 y *x* = 3 se produce un cambio, vamos a ver que ocurre en las proximidades laterales de esos números, aunque ya hemos visto que en esos números hay imagen.

$$x = pr\grave{o}ximo\ -3 \rightarrow \begin{cases} x = -3^- \rightarrow f(-3^-) = -3^- + 8 = 5^- \\ x = -3^+ \rightarrow f(-3^+) = (-3^+)^2 - 4 = 9^- - 4 = 5^- \end{cases}$$

$$x = pr\grave{o}ximo\ 3 \rightarrow \begin{cases} x = 3^- \rightarrow f(3^-) = (3^-)^2 - 4 = 9^- - 4 = 5^- \\ x = 3^+ \rightarrow f(3^+) = -2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$proximidades\ de\ x = -3 \begin{cases} f(-3^-) = 5^- \\ f(-3) = 5 \\ f(-3^+) = 5^- \end{cases} \quad no\ hay\ salto.\ Hay\ continuidad$$

$$proximidades\ de\ x = 3 \begin{cases} f(3^-) = 5^- \\ f(3) = 5 \\ f(3^+) = -2 \end{cases} \quad si\ hay\ salto.\ No\ hay\ continuidad$$

¸ Para dibujar la gráfica conviene construir tantas tablas de valores como intervalos, ya que para cada intervalo la función tiene forma distinta.

x <&3	*y* = *x*+8 (recta)
&8	0
&4	4
&3	----
$\&3^\&$	$5^\&$

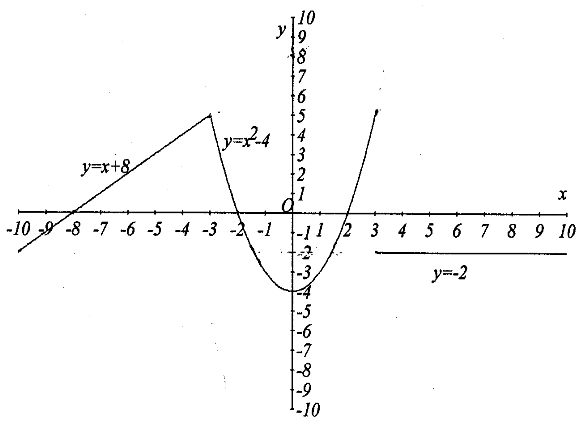
&3 # *x* # 3	y = x^2&4 (parábola)
0	&4 V(0,&4)
1	&3
&1	3
2	0
&2	0
3	5
&3	5

x > 3	*y* = &2 (recta)
4	&2
5	&2
100	&2
3	---
3^+	&2

¸ Ahora, ayudado por un programa informático, dibujamos la gráfica:

Observa lo siguiente:

"Mirando" la gráfica desde la izquierda, vemos que crece desde ***x*=&4** hasta ***x*=&3**, decrece entre ***x* = &3** y ***x* = 0**, crece entre ***x* = 0** y ***x*=3**, efectúa un salto desde ***y*=5** hasta ***y*=&2** y permanece constante hasta *x*=&4.



En x = &3 se produce un "*pico*" de la gráfica, pero el dibujo es continuo (es decir, no es necesario levantar el lápiz para dibujarla). Sin embargo, en x = 3 se produce un salto de la gráfica, es decir, es necesario levantar el lápiz para dibujarla. Se dice que en x = &3 hay una discontinuidad (en este caso se dice "*inevitable*").

Ejemplo 22.-

Vamos a representar gráficamente la función dada por intervalos siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x+2 & si \quad x<2 \\ -\frac{5}{3}x+\frac{25}{3} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Veamos:

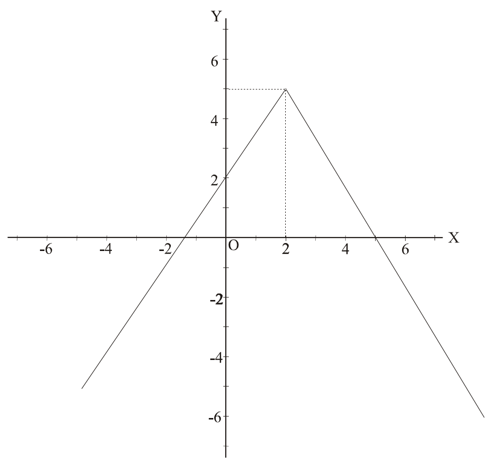
Observamos que para $x = 2$ la función no está definida, es decir, no existe $f(2)$. Es el único número que no tiene imagen. Por tanto:

$$D_f = \mathrm{R}-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$$

También observamos que la gráfica de la función estará formada por dos semirrectas. Una dibujada a lo largo del intervalo (&4 , 2) y la otra a lo largo del intervalo (2 , +4). La primera de ellas es creciente (ya que el coeficiente de ***x*** es 1´5>0), mientras que la segunda es decreciente (nótese que el coeficiente de x es &1´666... <0).

Para dibujar la gráfica construimos dos tablas de valores (una por cada intervalo)

$x<2$	$y=\frac{3}{2}x+2$	x>2	$y=\frac{-5}{3}x+\frac{25}{3}$
0	2	3	37699
&2	&1	5	0



En x = 2 hay "*un salto*" de "*un sólo punto*", es decir, hay una discontinuidad. Este tipo de discontinuidad se llama "**evitable**" porque se evita poniendo que $f(2) = 5$.

11.Función "parte entera de *x*". Gráfica.-

Se define la función "***parte entera de x***" como aquella función que transforma a todo número real ***x*** en:

” El propio ***x*** si ***x*** es un número entero.

” En el número entero inferior que esté más próximo a ***x***.

A la función "***parte entera de x***" la denotaremos $E(x)$.

Matemáticamente se define del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} E:\mathrm{R}\longrightarrow \mathrm{R} \\ x\longrightarrow E(x) \end{array}\right\} \quad siendo \quad E(x)=\begin{cases} x & si \quad x\in \mathrm{Z} \\ a & si \quad a<x<a+1 \quad con \quad a\in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Otra forma más abreviada de definir esta función es:

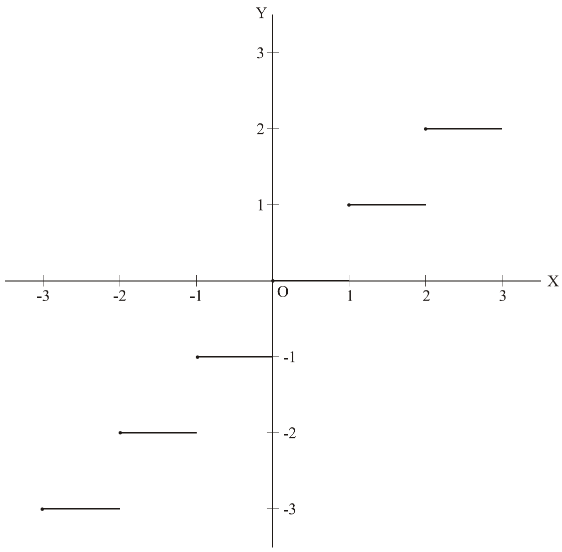
$$E(x)=a \quad siendo \quad a\leq x<a+1 \quad con \quad a\in \mathrm{Z}$$

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x=0\rightarrow\ E(0)=0 & porque\ \ 0\in \mathrm{Z} \\ x=1\rightarrow\ E(1)=1 & porque\ \ 1\in \mathrm{Z} \\ x=-1\rightarrow\ E(-1)=-1 & porque\ -1\in \mathrm{Z} \\ x=2'73\rightarrow E(2'73)=2 & porque\ 2<2'73<3 \\ x=-\frac{11}{7}\rightarrow\ E(-\frac{11}{7})=-2 & porque\ -2<-\frac{11}{7}<-1 \\ x=-e\rightarrow\ E(-e)=-3 & porque\ -3<-e<-2 \end{cases}$$

$E(x)$ puede expresarse como una función dada por intervalos. Veamos:

$$E(x)=\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -4 & si & -4\leq x<-3 \\ -3 & si & -3\leq x<-2 \\ -2 & si & -2\leq x<-1 \\ -1 & si & -1\leq x<0 \\ 0 & si & 0\leq x<1 \\ 1 & si & 1\leq x<2 \\ 2 & si & 2\leq x<3 \\ 3 & si & 3\leq x<4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$



P Nótese que la función E(x) está definida en infinitos intervalos que tienen una amplitud igual a 1, sus extremos son dos número enteros correlativos y de tal modo que son cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha.

P Obsérvese también que el dominio de esta función es ú, ya que todos los números reales tienen imagen.

P Otra observación es que el conjunto imagen o recorrido de esta función es el conjunto **Z** (conjunto de los enteros), ya que únicamente los enteros son imagen de algún número.

P Nótese que en los valores *x* = 0 ; *x* = 1 ; *x* = &1 ; *x* = 2 ; *x* = &2 ; .... , es decir, en los valores *x* 0Z, la función "*realiza*" un salto de tamaño una unidad. En esos valores la función presenta una discontinuidad inevitable, es decir, la función *E* (*x*) tiene infinitos puntos de discontinuidad.

Ejemplo 23.-

Consideremos la función definida del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} g: \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \\ \quad x \longrightarrow g(x) = x - E(x) \end{array}\right\}$$

Pretendemos:

- P Expresarla por intervalos.
- P Dibujar su gráfica

Veamos:

Si *x* 0**Z** entonces g(x) = *x* & *E*(*x*) = *x* & *x* = 0

Si *x* ó**Z** entonces g(x) = *x* & *a* siendo *a* # *x* < *a* +1 con *a* 0**Z**

Abreviadamente:

$$g(x) = x - E(x) = x - a \quad siendo \quad x \in \left[a, a+1\right) \quad con \quad a \in \mathrm{Z}$$

Nótese que en cada intervalo [*a* , *a* + 1), *g*(*x*) = *x*& *a* es una recta.

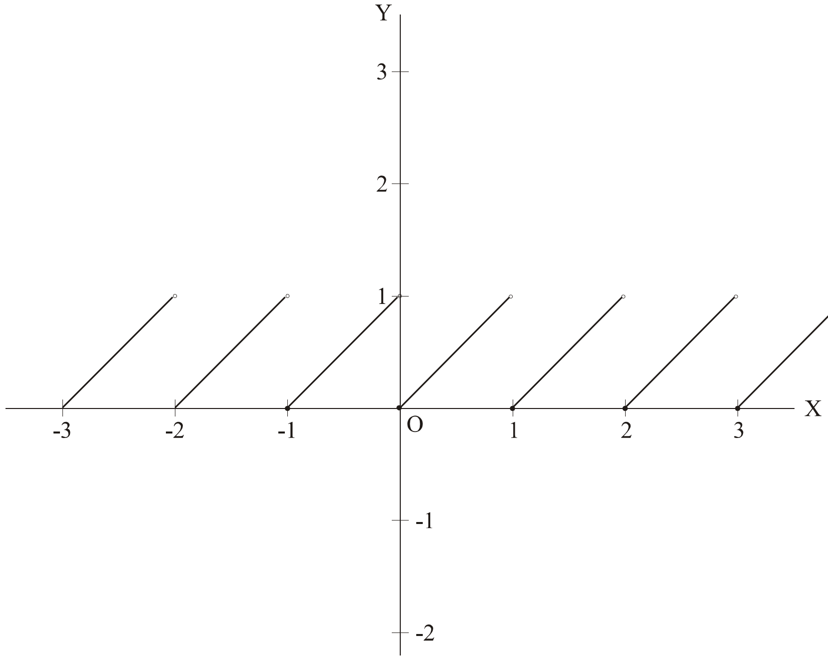
En forma de intervalos:

$$g(x) = x - E(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x-(-4) = x+4 & si \quad x \in \left[-4,-3\right) \\ x-(-3) = x+3 & si \quad x \in \left[-3,-2\right) \\ x-(-2) = x+2 & si \quad x \in \left[-2,-1\right) \\ x-(-1) = x+1 & si \quad x \in \left[-1,0\right) \\ x-0 = x & si \quad x \in \left[0,1\right) \\ x-1 & si \quad x \in \left[1,2\right) \\ x-2 & si \quad x \in \left[2,3\right) \\ x-3 & si \quad x \in \left[3,4\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Para dibujar la gráfica construimos previamente unas tablas de valores:

*x*0[0,1)	*y* = *x*	*x*0[&1,0)	*y* = *x* + 1	*x*0[1,2)	*y* = *x*&1	*x*0[&2,&1)	*y* = *x*+2
0	0	&1	0	1	0	&2	0
0´9	0´9	&0´1	0´9	1´9	0´9	&1´1	0´9
1&	1&	0&	1&	2&	1&	&1&	1&

Con lo obtenido en las tablas anteriores ya debemos ser capaces de dibujar la gráfica de la función *g* (*x*) = *x* & *E*(*x*) en cada uno de los intervalos.



Nótese lo siguiente:

Ø El dominio de esta función es ú, ya que todo número real tiene imagen.

Ù En los puntos x = nº entero , se produce un salto de discontinuidad inevitable, es decir, es necesario "*levantar*" el lápiz del papel para dibujar la gráfica.

12.Función "valor absoluto de *x*". Gráfica.-

Se define la función "***valor absoluto de x***" como aquella función que transforma todo número real en su valor absoluto.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \\ \quad x \longrightarrow f(x) = |x| \end{array}\right\} \textit{siendo} \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, la función ***valor absoluto de x*** es una función dada por intervalos. Nótese que:

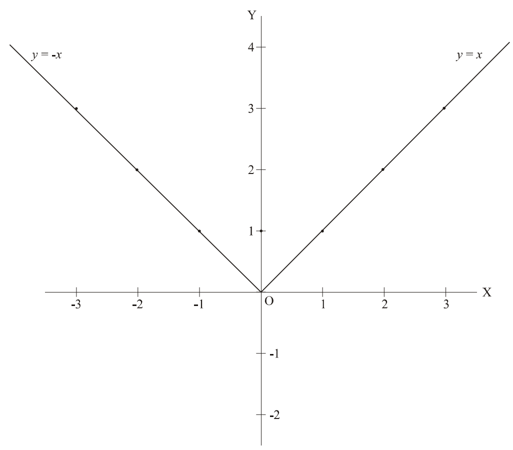
º En el inervalo (&4 , 0) la función $f(x)$ = *x* es del tipo polinómica de grado 1 y con pendiente negativa (pendiente = &1).

º En el inervalo [0 , +4) la función $f(x)$ = *x* es del tipo polinómica de grado 1 y con pendiente positiva (pendiente = 1).

Construimos dos tablas de valores:

$x < 0$	y = &x	x $ 0	$y = x$
&1	1	0	0
&3	3	1	1
0&	0+	3	3

Se trata de dos semirrectas



Ejemplo 24.-

Dada la función $y = f(x)$ = * x + 3 * , queremos dibujar su gráfica.

Veamos:

j Todo número real tiene imagen, por lo que el dominio es ú. Es decir:
œx 0 ú se verifica que $f(x)$ = * x + 3 *0 ú. Por tanto, D_f = ú = (&4 , +4).

j Este tipo de función puede expresarse por intervalos. Veamos:

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & si \quad x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & si \quad x+3 < 0 \end{cases}$$

Ahora bien:

$$x+3 \quad si \quad \begin{cases} x+3 \geq 0 \rightarrow inecuacion. \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$-(x+3) = -x-3 \quad si \quad \begin{cases} x+3 < 0 \rightarrow inecuacion \\ x < -3 \end{cases}$$

Podemos poner :

$$\boxed{f(x) = |x+3| = \begin{cases} -x-3 & si \quad x < -3 \\ x+3 & si \quad x \geq -3 \end{cases}}$$

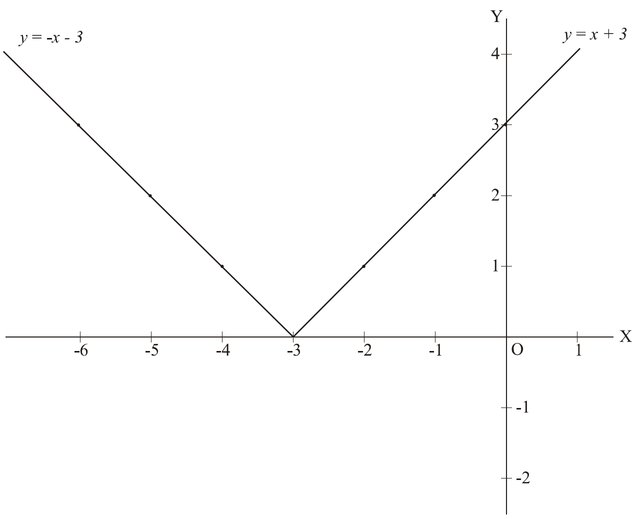
Nótese que en el intervalo (&4 , &3) es una función polinómica de grado 1 y pendiente negativa (recta) y en el intervalo [-3 , +4) también es una recta, pero de pendiente positiva.

j Construyamos las tablas de valores:

x < &3	y = &x&3	x $ &3	y = x+3
&4	1	&3	0
&6	3	0	3
&3[&]	0[+]	6	9

Se trata de dos semirrectas

j Dibujemos la gráfica:



En la gráfica de $y = f(x)$ = * x + 3 * apreciamos que dicha función es decreciente, alcanza un mínimo en el punto de abcisa x = &3 y crece hacia el infinito.

Nótese que la función es continua, es decir, su gráfica puede dibujarse sin necesidad de levantar el lápiz del papel.

La gráfica corta a ambos ejes en los puntos P(&3,0) y Q(0,3).